Mehrgleichungsmodelle: Schätzverfahren

Kapitel 21

Angewandte Ökonometrie / Ökonometrie III
Michael Hauser

Inhalt

- SUR, seemingly unrelated regressions
- Systeme von interdependenten Gleichungen
- 2SLS, 2-stage least squares
- 3SLS, 3-stage least squares

Seemingly unrelated regressions, SUR

SUR allgemein

Es liegen m Gleichungen und n Beobachtungen vor.

$$\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i \beta_i + \boldsymbol{u}_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$\boldsymbol{y}_i$ und $\boldsymbol{u}_i$ sind Vektoren der Länge n, $\boldsymbol{X}_i$ eine $(n \times k_i)$ Datenmatrix, $\boldsymbol{\beta}_i$ ein Vektor der Länge k_i.
Die Fehler der einzelnen Gl. sind nur kontemporär korreliert.

$$\mathrm{Var}(u_{ti}) = \sigma_i^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(u_{it}, u_{jt}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_i' \boldsymbol{u}_j) = \sigma_{ij}$$

Die $(m \times m)$ Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_c$ für t über alle Gleichungen

$$\boldsymbol{\Sigma}_c = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1m} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

SUR allgemein

Der Einzel-Gleichungs-OLS-Schätzer für Gl. i ist

$$\hat{\beta}_{i,OLS} = (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i$$

Er ist nur dann effizient, wenn $\mathbf{\Sigma}_c$ eine Diagonalmatrix ist.

Bem.: OLS in Matrixnotation finden Sie im Kapitel 3 der LV Ökonometrie 1 auf Folien 15 und 19.
http://statmath.wu.ac.at/~hauser/LVs/Oetrie1/Folien_N/Oetrie1_K3.pdf

System, Choleksy-Zerlegung

Als System angeschrieben

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{X}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{u} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{V} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Sigma}_c \otimes \boldsymbol{I}_n$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_c = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1m} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

Wir wenden den feasible GLS, FGLS, Schätzer an.

Jede symmetrische, positiv definite Matrix (alle Eigenwerte positiv), $\boldsymbol{A}$, lässt sich in ein Produkt einer unteren, $\boldsymbol{L}$, mit einer oberen, $\boldsymbol{L}'$, Dreiecksmatrix zerlegen.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' \qquad \textbf{Cholesky-Zerlegung}$$

Man schreibt z.B. auch $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{1/2}(\boldsymbol{V}^{1/2})'$.

Feasible GLS

Wir multiplizieren $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{u}$ von links mit $\boldsymbol{V}^{-1/2}$

$$\boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{u}$$

und lösen ein System ohne SUR Problem, $\widetilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{y}$, ...

$$\widetilde{\boldsymbol{y}} = \widetilde{\boldsymbol{X}}\beta + \widetilde{\boldsymbol{u}}$$

mit $V = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{\Sigma}_c \otimes \boldsymbol{I}_n$ und $\mathrm{Var}(\boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{u}) = \mathrm{E}[\boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{u})'] =$
$= \mathrm{E}[\boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{V}^{-1/2})'] = \boldsymbol{V}^{-1/2}\mathrm{E}[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'](\boldsymbol{V}^{-1/2})' = \boldsymbol{V}^{-1/2}\,\boldsymbol{\Sigma}_c \otimes \boldsymbol{I}_n\,(\boldsymbol{V}^{-1/2})'$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{c,\widetilde{\boldsymbol{u}}} = \sigma^2\boldsymbol{I}_m$$

Feasible GLS

Der GLS Schätzer ist

$$\hat{\beta}_{GLS} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y}$$

mit $\text{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}$.

Da $\boldsymbol{V}$ bzw. Σ_c nicht bekannt ist, werden die σ_{ij} aus der OLS-Schätzung verwendet.

- Schätzen des Modells mit dem Einzel-Gleichung-OLS-Schätzer.
- Ersetzen der σ_{ij} durch $\hat{\sigma}_{ij}$ aus den OLS-Residuen, $\boldsymbol{e}_i$.
- Ersetzen vom $\boldsymbol{V}$ durch $\hat{\boldsymbol{V}}_{OLS}$

$$\hat{\beta}_{FGLS} = (\boldsymbol{X}'\,\hat{\boldsymbol{V}}_{OLS}^{-1}\,\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\hat{\boldsymbol{V}}_{OLS}^{-1}\,\boldsymbol{y}$$

mit $\text{Var}(\hat{\beta}_{FGLS}) = (\boldsymbol{X}'\,\hat{\boldsymbol{V}}_{OLS}^{-1}\,\boldsymbol{X})^{-1}$.

Bem.: Vgl. Kapitel 11 aus Ökonometrie 2, Folien 34f.
http://statmath.wu.ac.at/~hauser/LVs/Oetrie2/Folien/CWS11h.pdf

In EViews: Modellierung als System

Beispiel: Grunfeld & Griliches(58), FGLS

Grunfeld und Griliches untersuchen das Investitionsverhalten von 10 Unternehmen für die Periode 1935-1954.

I ... Br.investitionen, F ... Marktwert, C ... Anlagenwert

General Motors:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{OLS} &= -149.78 + 0.119F + 0.371C \qquad R^2 = 0.92, s_e = 91.78 \\ \hat{I}_{FGLS} &= -133.57 + 0.115F + 0.376C \qquad R^2 = 0.92, s_e = 91.86 \end{aligned}$$

Chrylser:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{OLS} &= -6.19 + 0.078F + 0.316C \qquad R^2 = 0.91, s_e = 13.28 \\ \hat{I}_{FGLS} &= -3.27 + 0.073F + 0.320C \qquad R^2 = 0.91, s_e = 13.31 \end{aligned}$$

General Electric:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{OLS} &= -9.96 + 0.027F + 0.152C \qquad R^2 = 0.71, s_e = 27.88 \\ \hat{I}_{FGLS} &= -11.96 + 0.028F + 0.152C \qquad R^2 = 0.71, s_e = 27.89 \end{aligned}$$

Bestimmtheitsmaß, R^2

Das multiple Bestimmtheitsmaß für das System kann über

$$R^2 = 1 - \frac{S(\hat{\beta}_{FGLS})}{S(0)}$$

berechnet werden. Wobei die Summe der Fehlerquadrate über die Gleichungen

$$S(\hat{\beta}_{FGLS}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}_{FGLS})' \, \boldsymbol{V}_{OLS}^{-1} \, (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}_{FGLS})$$

$S(0)$ ist die Fehlerquadratsumme, wenn im Modell (in den einzelnen Gleichungen) nur der Interzept verwendet wird. Durch Umformung erhält man

$$R^2 = 1 - \frac{\mathrm{Sp}(\hat{\Sigma}_{c,OLS}^{-1}\hat{\Sigma}_{c,FGLS})}{\mathrm{Sp}(\hat{\Sigma}_{c,OLS}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_{yy})} \approx 1 - \frac{m}{\mathrm{Sp}(\hat{\Sigma}_{c,OLS}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_{yy})}$$

$\boldsymbol{S}_{yy}$ ist eine $(m \times m)$ Matrix. $\quad [\boldsymbol{S}_{yy}]_{ij} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j)$.

SUR in EViews

New Object –> System // Eingeben der Gleichungen z.B.

```
invx1 = c(1) + c(2)*valx1 + c(3)*capx1
invx2 = c(4) + c(5)*valx2 + c(6)*capx2
```

Name // Estimate (SUR) // und // Estimate (OLS) // für Letzteres

Proc –> Make residuals // Name group of residuals (z.B. gr_res).

Befehl:

```
matrix sig_ols = @cov(@convert(gr_res))
```

Analog für Modell mit nur Interzepts ab Name und OLS für $\boldsymbol{S}_{yy}$:

```
matrix syy = ...
```

Einfache Variante für R^2, Befehl:

```
scalar r2=1 - m/@trace(@inverse(sig_ols)*syy)
```

Mehrgleichungsmodelle: Schätzung

Einzel-Gleichungs-Schätzung: Simultaneous equation bias

Betrachten wir das Ag-Nf-Problem II.

$Q = \alpha_1 + \alpha_2 P + \alpha_3 Y + u_1$ Nf, nicht identifiziert

$P = \beta_1 + \beta_2 Q + u_2$ Ag, identifiziert

Die reduzierte Form

$Q = \pi_{11} + \pi_{12} Y + w_1$ $\quad w_1 = (-\beta_2 u_1 + \alpha_2 u_2)/(\alpha_2 - \beta_2)$

$P = \pi_{21} + w_2$ $\quad w_2 = (-u_1 + u_2)/(\alpha_2 - \beta_2)$

zeigt, dass die endogenen Vars von allen Störungen der Strukturform, u_1 und u_2 abhängen. Dies verletzt die Annahme, dass die erklärenden Vars mit dem Störterm unkorreliert sind. Z.B.: Mit u_2 ändert sich P in der 2-ten Gl. Verändertes P beeinflusst Q in der 1.Gl und damit Q in der 2-ten.

Lösung d simultaneous equation bias mit Instrumentenvariablen (IV)

Die Orthogonalität von Störung und erklärenden Variablen ist verletzt.

Der Einzel-Gleichungs-OLS wie auch der SURE-GLS-Schätzer ist

- verzerrt und
- nicht konsistent.

Regressiert man zuerst die endogenen Variablen einer Gleichung auf Instrumente (es werden alle prädeterminierte Variable als Instrumente angesehen) und ersetzt sie durch deren lineare Approximation, tritt dieses Problem nicht auf.

Dieses Verfahren heißt **2SLS**, **2 stage least squares**, 2-stufiger Kleinstquadrat Schätzer.

Bem.: Vgl. zu IV Kapitel 15 aus Ökonometrie 2, Folien 8f, 14.
http://statmath.wu.ac.at/~hauser/LVs/Oetrie2/Folien/CWS15ba.pdf

Schätzung eines Systems: Bemerkungen

Bemerkungen:

1. Wenn keine geeigneten Instrumente zur Verfügung stehen, kann die Hilfsvariable das Verhalten der endogenen nur schlecht wiedergeben. Die Schätzung des gesamten Modells leidet.
   Es ist daher zu überlegen, was überwiegt:
   Der **simultaneous equation bias** oder der Verlust an Information durch schlechte Instrumente.
2. Auch wenn **Occam's Razor**, bei gleicher Qualität (im gegebenen Rahmen) das sparsamere Modell vorzieht, können in Modellen fehlende Variable oder vernachlässigte simultane Beziehungen Probleme verursachen.

2SLS

Es sei die i-te Gleichung

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{u}_i$$

$\boldsymbol{Y}_i$ die $(n \times m_i)$ Matrix der endogenen Variablen auf der rechten Seite,
$\boldsymbol{Z}_i$ die $(n \times K_i)$ Matrix der prädeterminierten Variablen.

2SLS erfolgt in 2 Schritten:

1. Wir regressieren alle $\boldsymbol{Y}_i$ auf alle vorherbestimmte Variablen (des Modells) $\boldsymbol{Z}$. ($\boldsymbol{Z}$ ist hier nicht die gestackte Form.)

   $$\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Pi}_i' + \boldsymbol{V}_i$$

   Dabei verwenden wir Einzel-Gl-OLS, und ersetzen die $\boldsymbol{Y}_i$ in $\boldsymbol{X}_i$ durch das fitted $\boldsymbol{Y}_i$, $\hat{\boldsymbol{Y}}_i$. $\quad \hat{\boldsymbol{X}}_i = (\hat{\boldsymbol{Y}}_i \;\; \boldsymbol{Z}_i)$.

2. Der 2SLS-Schätzer für $\boldsymbol{\beta}_i$ ergibt sich durch OLS für

   $$\boldsymbol{y}_i = \hat{\boldsymbol{X}}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{u}_i$$

Beispiel: 2SLS, Schweinefleisch

Betrachten wir das Ag-Nf-Problem III für Schweinefleisch. Beide Gl. sind exakt identifiziert. Y, Z exogen.

$$Q = \alpha_1 + \alpha_2 P + \alpha_3 Y + u_1 \qquad \text{Nf}$$

$$Q = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 Z + u_2 \qquad \text{Ag}$$

2SLS Schätzung:

1. Stufe: Alle prädet. Vars werden als Instrumente verwendet.
   $\hat{Q} = 11.2 + 0.008Y + 0.728Z \qquad R^2 = 0.89$
   $\hat{P} = 16.1 + 0.046Y - 0.236Z \qquad R^2 = 0.73$
2. Stufe: OLS mit den modellierten endogenen Vars.
   $\hat{Q}_{2SLS} = 60.9 - 3.088\hat{P} + 0.149Y \qquad R^2 = 0.89$
   $\hat{Q}_{2SLS} = 8.32 + 0.177\hat{P} + 0.770Z \qquad R^2 = 0.89$

Beispiel: 2SLS, Schweinefleisch (Fs.)

Tabelle: Vergleich von OLS und 2SLS Schätzung

	Nachfrage		Angebot	
	P	Y	P	Z
OLS	-1.41	0.08	-.03	0.77
2SLS	-3.09	0.15	0.18	0.74

2SLS: Eigenschaften

Ist die i-te Gleichung identifiziert, so ist der 2SLS-Schätzer der i-ten Gleichung

- konsistent und
- asymptotisch normalverteilt.

Bem: Für die Identifizierbarkeit verlangt die Ordnungsbedingung, dass die Anzahl der aus der Gleichung ausgeschlossenen prädeterminierten Variablen mindestens so groß ist, wie die Zahl der erklärenden endogenen Variablen.

$$K_i^* \geq m_i$$

Dh: Nur bei Identifzierbarkeit stehen genügend Instrumente zur Verfügung.

2SLS: Bemerkungen

- Mit 2SLS können alle identifizierten Gl des Systems (einzeln) geschätzt werden.
- Nicht identifizierte Gl werden nicht geschätzt.
- Das System gibt vor, welche Variable endogen, und welche prädeterminiert sind.
- Mit den prädeterminierten Vars sind auch die Instrumente vorgegeben.
- Die mögliche kontemporäre Korrelation der Störterme wird - im Gegensatz zur SUR - nicht berücksichtigt.

3SLS

3SLS erweitert den 2SLS um die kontemporäre Korrelationen der Störterme. Er ist ein FGLS eines 2SLS.

Wir schreiben die m Gleichungen des Modells

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{X}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{V} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{u}) = \Sigma_c \otimes \boldsymbol{I}_n$$

Wenn eine Variable in mehreren Gl auftritt, wird sie mehrmals eingetragen.

Wir ersetzen alle $\boldsymbol{X}_i$ durch $\hat{\boldsymbol{X}}_i$ aus der 2SLS Prozedur und berechnen für das neue System eine SUR.

3SLS

3SLS Schätzung erfolgt in 3 Schritten:

1. 2SLS
   - Die Hilfsvariablen $\hat{\boldsymbol{X}}_i$ werden durch Projektion der $\boldsymbol{X}_i$ auf die Instrumente $\boldsymbol{Z}$ berechnet. $\boldsymbol{P}_z$ ist die Projektionsmatrix.
     $\hat{\boldsymbol{X}}_i = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{P}_z\boldsymbol{X}_i$
   - Für jede Gl wird der 2SLS Schätzer $\hat{\beta}_{i,2SLS}$ berechnet.
   - Zu jeder Gl werden die 2SLS Residuen berechnet.

$$\boldsymbol{e}_{i,2SLS} = \boldsymbol{y}_i - \hat{\boldsymbol{y}}_{i,2SLS}$$

2. Berechnen von $\hat{\Sigma}_{c,2SLS} = [\hat{\sigma}_{ij,2SLS}]$.

$$\hat{\sigma}_{ij,2SLS} = \boldsymbol{e}'_{i,2SLS}\,\boldsymbol{e}_{j,2SLS}/n$$

3. Der 3SLS ist der FGLS der 2SLS Schätzer.
   In stacked Form

$$\hat{\beta}_{3SLS} = (\boldsymbol{X}'\,\boldsymbol{V}^{-1}\,\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y}$$

   mit $\boldsymbol{V}^{-1} = \hat{\Sigma}^{-1}_{c,2SLS} \otimes \boldsymbol{P}_z$

3SLS: Eigenschaften

Sind *alle* Gleichungen identifiziert, so ist der 3SLS-Schätzer

- konsistent und
- asymptotisch normalverteilt.

Beispiel: 3SLS, Schweinefleisch

Tabelle: Vergleich von 2SLS und 3SLS Schätzung

	Nachfrage		Angebot	
	P	Y	P	Z
2SLS	-3.09	0.15	0.18	0.74
t	3.49	3.67	1.22	10.16
3SLS	-3.09	0.15	0.18	0.74
t	3.79	3.98	1.32	11.02

Die größeren t-Werte des 3SLS weisen auf eine größere Effizenz des Schätzers hin.

Weitere Systemschätzer

- ILS: indirect least squares
  Hier wird die reduzierte Form geschätzt.
- LIML: limited information maximum likelihood
- FIML: full information maximum likelihood