

ZUSAMMENFASSUNG

- **Konzeptionelle Fragen:** Beim praktischen Modellieren von ökonomischen Prozessen sollen oft die Entwicklungen und Wechselwirkungen von mehr als einer endogenen Variablen gemeinsam dargestellt werden. Dann ergibt sich die Notwendigkeit, ein Modell mit mehreren Gleichungen gemeinsam zu spezifizieren und zu analysieren. Die konzeptionellen Fragen, die sich beim Spezifizieren von Mehrgleichungs-Modellen ergeben, betreffen die unterschiedlichen Typen von Modellen, die Klassifizierung der Modellvariablen und Parameter, die das Schätzen der Modellparameter betreffen.
- **Multivariate Regressionsmodelle:** Ihr Charakteristikum ist, dass endogene Variablen bei diesen Modellen unter den Regressoren nicht vorkommen. Zu dieser Klasse von Mehrgleichungs-Modellen gehört das *seemingly unrelated regression* oder SUR-Modell; ein Spezialfall liegt vor, wenn alle Gleichungen des Modells die gleichen Regressoren verwenden.
- **Simultane Mehrgleichungs-Modelle:** Der zweite und interessantere Typ von Mehrgleichungs-Modellen sind die interdependenten oder simultanen Mehrgleichungs-Modelle. Sie verwenden endogene Variablen als Regressor. Eine Folge davon ist, dass die OLS-Schätzer ihrer Koeffizienten nicht konsistent sind.
- **Identifizierbarkeit:** Die Frage, unter welchen Bedingungen mit konsistenten Schätzern der Strukturparameter gerechnet werden kann, ist auch die Frage nach der Identifizierbarkeit einer Modellgleichung beziehungsweise ihrer Parameter. Kriterien der Identifizierbarkeit wie die Abzähl- oder Ordnungsbedingung und die Rangbedingung laufen auf das Ausführen von Operationen der linearen Algebra hinaus.

Wichtige Begriffe

- Abzählkriterium
- definitorische Identität
- endogene Variable
- exogene Variable
- Gleichgewichtsbedingung
- identifizierbar
- Interdependentes Mehrgleichungs-Modell
- Klein's Modell 1
- Modellstruktur
- Multivariates Regressionsmodell
- Ordnungskriterium
- Rangbedingung
- Reaktionsgleichung

- reduzierte Form
- rekursives Mehrgleichungs-Modell
- scheinbar unverbundenes Regressionsmodell
- simultanes Mehrgleichungs-Modell
- Strukturform
- SUR-Modell
- Verhaltensgleichung
- Vollständigkeit
- vorherbestimmte Variable

AUFGABEN

20.A.1 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1 Das Mehrgleichungs-Modell

$$Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 X + u_1$$

$$Y_2 = \beta_1 Y_1 + \beta_2 X + u_2$$

enthält die endogenen Variablen Y_1 und Y_2 sowie die exogene Variable X .

- (a) Geben Sie die reduzierte Form des Modells an und schreiben Sie deren Parameter als Funktionen der Strukturparameter an.
- (b) Schreiben Sie die Strukturparameter als Funktionen der Parameter der reduzierten Form an.
- (c) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.
- (d) Zeigen Sie, dass die zweite Gleichung identifiziert ist, wenn $\beta_2 = 0$. Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der ersten Gleichung in diesem Fall und erklären Sie das Ergebnis.

2 Zeigen Sie, dass für den Schätzer b_2 des Parameters β_2 der Angebotsfunktion im Modell von Beispiel 20.12 die beiden Lösungen

$$b_2 = \frac{\hat{\pi}_{12}}{\hat{\pi}_{22}}, \quad b_2 = \frac{\hat{\pi}_{13}}{\hat{\pi}_{23}}$$

existieren.

3 Das Mehrgleichungs-Modell

$$Y_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} Y_3 + u_1$$

$$Y_2 = \alpha_{21} + \alpha_{22} Y_1 + \alpha_{23} Y_3 + \alpha_{24} X_1 + u_2$$

$$Y_3 = \alpha_{31} X_2 + u_3$$

enthält die endogenen Variablen Y_1 , Y_2 und Y_3 sowie die exogenen Variablen X_1 und X_2 .

- (a) Geben Sie die Matrizen A und F der Strukturparameter an. Zeigen Sie, dass es sich um ein rekursives Gleichungssystem handelt.
- (b) Geben Sie die reduzierte Form des Modells an und schreiben Sie die Elemente der Matrix Π als Funktionen der Strukturparameter an.
- (c) Schreiben Sie die Strukturparameter als Funktionen der Elemente der Matrix Π an.
- (d) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.

4. Das simultane Mehrgleichungs-Modell

$$\begin{aligned} C &= \alpha_1 + \alpha_2 Y + u_1 \\ I &= \beta_1 + \beta_2 Y + \beta_3 G_{-1} + u_2 \\ Y &= C + I + G \end{aligned}$$

verknüpft die Variablen C (Konsum), Y (Einkommen), I (Investitionen) und G (Staatsausgaben).

- (a) Legen Sie fest, welche Variablen endogen, exogen und vorherbestimmt sind, und geben Sie die Matrizen A und F der Strukturparameter an.
- (b) Formen Sie das Modell in seine reduzierte Form um und geben Sie die Matrix Π an.
- (c) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.
- (d) Bestimmen Sie den Effekt einer Änderung der Staatsausgaben ($\Delta G = 1$) auf C , Y und I in den nächsten beiden Perioden.

5. Das IS-LM-Modell umfasst folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_t &= \gamma_{11} - \alpha_{14} Y_t + u_{1t} \\ I_t &= \gamma_{21} - \alpha_{23} R_t + u_{2t} \\ R_t &= -\alpha_{34} Y_t + \gamma_{32} M_t + u_{3t} \\ Y_t &= C_t + I_t + Z_t \end{aligned}$$

mit C (Konsum), I (Brutto-Investitionen), R (Zinssatz), Y (Einkommen), M (Geldmenge), Z (autonome Ausgaben). Endogen sind C , I , R und Y , exogen sind 1 , M und Z .

- (a) Formen Sie das Modell in seine reduzierte Form um und geben Sie die Matrix Π an.
- (b) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.

- 6.** Schreiben Sie die Kovarianzmatrix $V = \Sigma \otimes I_n$ des $2n$ -Vektors \tilde{u} aus Gleichung (20.3.3) aus, wobei für den Vektor $u_t = (u_{t1}, u_{t2})'$ gilt:

$$\text{Var}\{u_t\} = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

- 7.** Die (3×3) -Matrix A eines Mehrgleichungs-Modells habe eine Dreiecksform mit Einsen in der Hauptdiagonale und den Elementen a , b und c unterhalb der Hauptdiagonale; die Matrix F sei von der Ordnung 1×3 . Schreiben Sie die Strukturform des Modells in Langform und interpretieren Sie den Satz: „In einem rekursiven Mehrgleichungs-Modell beeinflussen sich die endogenen Variablen nur in einer Richtung.“