den integrierten Variablen stellt eine Gleichgewichtsbeziehung dar: Sie wird – bis auf Irregularitäten, die keine in die Zukunft reichenden Auswirkungen haben – innerhalb jeder Beobachtungsperiode eingehalten.

- **Fehlerkorrektur-Modell und Kointegration**: Fehlerkorrektur-Modelle sind auf der Basis von nichtstationären Variablen spezifiziert. Die Modelle erlauben es uns, die Änderungen einer differenz-stationären abhängigen Variablen als Effekt (i) der Änderungen der Regressoren und (ii) von teilweisen Anpassungen an Gleichgewichtsfehler in der Vorperiode darzustellen, wenn eine Gleichgewichtsbeziehung zwischen der abhängigen Variablen und den Regressoren gefunden werden kann, die Variablen also kointegriert sind. ADL-Modelle, die wichtige Klasse von Modellen zum Beschreiben von dynamischem Verhalten, können in der Fehlerkorrektur-Form dargestellt werden.
- **Test auf Kointegration**: Zum Feststellen der Ordnung der Integration von Zeitreihen werden *Unit-root*-Tests verwendet. Der Test auf Kointegration macht davon Gebrauch: Ein *Unit-root*-Test wird auf die Residuen der vermuteten Gleichgewichtsbeziehung angewendet. Da Kointegration davon ausgeht, dass die Variablen integriert von der gleichen Ordnung sind, wird vor dem Schätzen der vermuteten Gleichgewichtsbeziehung mittels *Unit-root*-Test die Ordnung der Integration der einzelnen Variablen festgestellt.
- **Schätzen des Fehlerkorrektur-Modells**: Zum Schätzen der Parameter kann das Engle-Granger-Verfahren verwendet werden, mit dem das Fehlerkorrektur-Modell in einem mehrstufigen Verfahren an die Daten angepasst wird.

Wichtige Begriffe

- Engle-Granger-Test
- Engle-Granger-Verfahren
- Fehlerkorrektur-Form
- Gleichgewichtsbeziehung
- Gleichgewichtsfehler
- integrierter Prozess
- Kointegrations-Test
- kointegrierender Vektor
- Ordnung der Integration
- random-walk-Prozess
- spurious-regression-Problem

AUFGABEN

19.A.1 Empirische Anwendungen

S.406

1. Die Konsumgleichung des AW-Modells ist im Anhang A als Gleichung (A.1.1) angegeben. Die modifizierte Gleichgewichtsbeziehung dieses Modells lautet $\log(PCR) = \mu_1 + \mu_2 \log(PYR)$, wobei PCR der reale Private Konsum und PYR das reale Verfügbare Einkommen der Haushalte ist. Überprüfen Sie, ob PCR und PYR (i) gleiche Ordnung der Integration haben und (ii) kointegrierte Variable sind; (iii) zeichnen Sie ein Zeitreihendiagramm der Residuen der modifizierten Gleichgewichtsbeziehung und interpretieren Sie das Diagramm aus der Sicht des Ergebnisses von (ii).
2. Der Datensatz `DatS01` enthält die Variablen CR (Privater Konsum) und YDR (Verfügbares Einkommen). Wiederholen Sie die Aufgabe 1 für CR und YDR.
3. Erzeugen Sie für den Sample-Bereich des Datensatzes `DatS01` Realisationen des *random walk* $RW_t = RW_{t-1} + u_t$; u ist Weißes Rauschen mit einer Standardabweichung von 200. Überprüfen Sie, ob (i) CR und und RW, (ii) YDR und RW kointegrierte Variablen sind.
4. Schätzen Sie ein Fehlerkorrektur-Modell für die Konsumgleichung des AW-Modells, wobei Sie die modifizierte Gleichgewichtsbeziehung verwenden; siehe Aufgabe 1.
5. Gehen Sie von der Fragestellung von Aufgabe 1 aus, wobei die Gleichgewichtsbeziehung der Konsumgleichung spezifiziert ist als $\log(PCR) = \mu_1 + \mu_2 \log(PYR) + \mu_3 \log(WLN / PCD)$.
   (a) Überprüfen Sie, ob PCR, PYR und WLN / PCD kointegrierte Variablen sind.
   (b) Schätzen Sie ein Fehlerkorrektur-Modell für die Konsumgleichung (A.1.1) des AW-Modells.
6. Verwenden Sie die Variablen CR und RW aus Aufgabe 3. Schätzen Sie ein Fehlerkorrektur-Modell für CR als Funktion von RW.

(b) Führen Sie für das nach (i) geschätzte Modell aus Übung (a) einen Test auf serielle Korrelation der Störgrößen (i) mittels Durbin's h und (ii) mittels der Teststatistik von Breusch-Godfrey durch.

(c) Bringen Sie die Investitionsfunktion in die entsprechende ADL-Form mit Störgrößen ε und schätzen Sie die Parameter mittels nichtlinearer OLS-Anpassung.

2. Die Produktionsfunktion $Y = \beta_1 + \beta_2 L + \beta_3 K + \beta_4 Y_{-1} + u$ kann auf Basis der AWM-Datenbasis geschätzt werden, wobei für Y die Zeitreihe YER (reales Brutto-Inlandsprodukt), für L die Zeitreihe LNN (Gesamtes Arbeitskräfte-Angebot) und für K die Zeitreihe KSR (Gesamter Kapitalbestand) verwendet wird. Die Störgrößen folgen einem AR(1)-Prozess $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ und Weißem Rauschen ε. Führen Sie die Übungen (a) bis (c) der Aufgabe 1 für die Produktionsfunktion aus.

18.A.2 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Ein ADL(1,1)-Modell hat die Form $Y_t = \alpha + \varphi Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t$, wobei $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ mit Weißem Rauschen ε. Zeigen Sie, dass es als ADL(2,2)-Modell mit den Störgrößen ε geschrieben werden kann.

2. Zeigen Sie, dass die Teststatistik

$$T = \hat{\varrho}\sqrt{\frac{n}{1 - n\,\mathrm{Var}\{\hat{\varphi}\}}}$$

mit Durbin's h nach (18.5.1) übereinstimmt; $\hat{\varrho}$ ist die Stichproben-Autokorrelation der Störgrößen.

18.B Hinweise zu `gretl` und `EViews`

18.B.1 Dynamische Modelle: Schätzen der Parameter

Beide Software-Pakete unterstützen das Schätzen der Parameter von dynamischen Modellen: Beide bieten Verfahren zum Schätzen von Modellen mit Lag-Strukturen; siehe die „Hinweise zu `gretl` und `EViews`" in Kapitel 13. Für das Schätzen von nichtlinearen Modellen stehen nichtlineare OLS-Algorithmen zur Verfügung.

Der NLKQ-Algorithmus in `gretl`

Zum Anwenden der nichtlinearen OLS-Schätzung klickt man im Hauptfenster die Schaltfläche **Modell** und dann den Menüpunkt `Nicht-lineare Modelle` an. Wählt man nun `Nicht-lineare Kleinstquadrate (NLS) ...`, so öffnet sich das Eingabe-Fenster `nicht-lineare KQ-Methode`, in der die zu schätzende Regressionsfunktion und gegebenenfalls ihre Ableitungen zu spezifizieren sind. Im Output-Fenster kann man sich neben den Schätzern der Modellparameter und anderen Ergebnissen die Details der einzelnen Iterationen anzeigen lassen.

Schätzen dynamischer Modelle in `EViews`

Das Schätzen der Parameter von dynamischen Modellen wird in mehrfacher Weise unterstützt: `EViews` erlaubt das Schätzen der Koeffizienten von Modellen mit korrelierten Störgrößen (siehe Kapitel 12) und das Spezifizieren einer polynomialen Lag-Struktur (siehe Kapitel 17). Die Koeffizienten nichtlinearer Modelle, die sich im Zusammenhang mit dynamischen Modellen oft ergeben, können mittels nichtlinearer OLS-Schätzung ermittelt werden. Dazu muss im Dialogfenster `Equation Estimation` die zu schätzende Modellgleichung explizit angegeben werden; als Parameter sind Komponenten des Koeffizientenvektors `c` zu verwenden. Unter `Options` ist die maximale Anzahl der Iterationen sowie das Abbruchkriterium festzulegen; Default-Werte sind vorgegeben. Im Output-Fenster des linearen Regressionsmodells werden ergänzend zum üblichen Inhalt die Anzahl der durchgeführten Iterationen und die verwendete Modellgleichung ausgegeben.

Anhang 18.A Der Gauß-Newton-Algorithmus

Der Gauß-Newton-Algorithmus wird dargestellt als Verfahren zur OLS-Schätzung der Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$ eines Modells

$$Y_t = f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) + u_t$$

mit einer in den Komponenten von $\boldsymbol{\theta}$ nichtlinearen Responsefunktion $f(\cdot)$. Zum Minimieren von

$$S(\theta) = \sum_{t=1}^{n}[Y_t - f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta})]^2$$

gibt es keine Lösung in geschlossener Form; es gibt eine Reihe von iterativen Verfahren zum Auffinden des Vektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, für den das Minimum erreicht wird.

Der Gauß-Newton-Algorithmus nähert sich dem Minimum an, indem er die nichtlineare Funktion durch eine lineare Funktion approximiert. Diese Approximation ergibt sich aus der Entwicklung der Funktion $f(\cdot)$ in eine Taylorreihe, die nach dem zweiten Summanden abgebrochen wird:

$$f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) \doteq f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum\nolimits_i \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i)\,.$$

Minimieren von

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\theta}) &= \sum\nolimits_t u_t^2 \doteq \sum\nolimits_t \left[Y_t - f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \sum\nolimits_i \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i)\right]^2 \\ &= \sum\nolimits_t \left[\hat{u}_t - \sum \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \Delta\theta_i\right]^2 \end{aligned}$$

(mit $\hat{u}_t = Y_t - f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ und $\Delta\theta_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$) entspricht dem Regressieren von $\hat{u}_t$ auf die Regressorvariablen

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad i = 1, \ldots, k$$