Durbin's h von −0.572; der entsprechende p-Wert beträgt 0.57, wenn wir von einer zweiseitigen Alternative ausgehen. Vermuten wir als Alternative eine positive Autokorrelation, dann wäre der p-Wert größer als 0.7. Wir können jedenfalls davon ausgehen, dass die Störgrößen unkorreliert sind.

18.5.2 Der Breusch-Godfrey-Test

Den Lagrange-Multiplier-Test von Breusch-Godfrey haben wir in Abschnitt 12.4 kennengelernt. Er ist auf dynamische Modelle anwendbar. Die Teststatistik ist

$$\mathrm{LM}(A) = nR_e^2\,,$$

wobei R_e^2 das Bestimmtheitsmaß aus der Regression der OLS-Residuen e_t auf Y_{t-1}, X_t und die verzögerten Residuen e_{t-1} ist. Unter H_0 folgt die Teststatistik LM(A) asymptotisch der Chi-Quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad, die wir bei großem n als näherungsweise Verteilung von LM(A) verwenden:

$$\mathrm{LM}(A) \mathrel{\dot\sim} \chi^2(1)\,.$$

Bei Verallgemeinerung des Prozesses der Störgrößen auf einen AR(p)-Prozess kann zum Test auf serielle Korrelation der Störgrößen wiederum die Teststatistik

$$\mathrm{LM}(A) = nR_e^2$$

verwendet werden. Basis ist hier das Bestimmtheitsmaß R_e^2 der Regression der OLS-Residuen e_t auf Y_{t-1}, X_t und die verzögerten Residuen $e_{t-1}, \ldots, e_{t-p}$. Als näherungsweise Verteilung der Teststatistik verwenden wir die unter H_0 asymptotische Chi-Quadrat-Verteilung mit p Freiheitsgraden:

$$\mathrm{LM}(A) \mathrel{\dot\sim} \chi^2(p)\,.$$

ZUSAMMENFASSUNG

- **Inferenz bei dynamischen Modellen:** Spezifische Verfahren der statistischen Inferenz bei dynamischen Modellen betreffen das Schätzen der Modellparameter und die Eigenschaften unterschiedlicher Schätzverfahren sowie das Testen auf Autokorrelation der Störgrößen.
- **Schätzer für dynamische Modelle:** Die OLS-Schätzer der Koeffizienten eines autoregressiven Modells sind konsistent, aber nicht erwartungstreu. Bei zusätzlicher Autokorrelation der Störgrößen, was bei dynamischen Modellen realistischerweise oft angenommen werden muss, sind die OLS-Schätzer auch nicht konsistent. Alternative Schätzverfahren sind die verallgemeinerte Kleinste-Quadrate- oder GLS-Schätzung und die Instrumentvariablen- oder IV-Schätzung; auch nichtlineare Modellgleichungen können sich ergeben, bei denen Verfahren wie die nichtlineare OLS-Schätzung angewendet werden müssen.

Der Cochrane-Orcutt-Schätzer ist ein Beispiel für einen FGLS-Schätzer. Die behandelten Verfahren erlauben das Schätzen der Parameter von DL- und von ADL-Modellen.

- **Testen auf Autokorrelation:** Dynamische Modelle enthalten oft eine autoregressive Komponente. In dieser Situation ist die Teststatistik des Durbin-Watson-Tests verzerrt. Daher wurden Testverfahren auf Autokorrelation der Störgrößen entwickelt, die auf autoregressive Modelle angewendet werden können. Dazu gehören Durbin's h-Test, ein Test auf Autokorrelation der Ordnung Eins, und der Breusch-Godfrey-Test, der auch Autokorrelationen höherer Ordnung zulässt.

Wichtige Begriffe

- ADL-Modell
- Breusch-Godfrey-Test
- Cochrane-Orcutt-Schätzer
- DL(s)-Modell
- Durbin's h-Test
- Durbin-Watson-Test
- FGLS-Schätzung
- Gauß-Newton-Algorithmus
- IV-Schätzung
- Koyck'sche Lag-Struktur
- Quasi-Differenzen

AUFGABEN

18.A.1 Empirische Anwendungen

1. Die Investitionsfunktion $I = \beta_1 + \beta_2 I_{-1} + \beta_3 I_{-2} + \beta_4 Y + u$ kann auf Basis der AWM-Datenbasis geschätzt werden, wobei für I die Zeitreihe ITR (reale Brutto-Investitionen) und für Y die Zeitreihe YER (reales Brutto-Inlandsprodukt) verwendet wird. Die Störgrößen folgen einem AR(1)-Prozess $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ und Weißem Rauschen ε.

   (a) Schätzen Sie das Modell (i) mittels OLS-Schätzung so, als wären die Störgrößen u Weißes Rauschen, (ii) mittels der Cochrane-Orcutt-Schätzung, (iii) mittels der Prais-Winsten-Methode und (iv) mittels IV-Schätzung, wobei Sie als Instrumente verzögerte Variablen YER verwenden.

21 → AR(1)

(b) Führen Sie für das nach (i) geschätzte Modell aus Übung (a) einen Test auf serielle Korrelation der Störgrößen (i) mittels Durbin's h und (ii) mittels der Teststatistik von Breusch-Godfrey durch.

(c) Bringen Sie die Investitionsfunktion in die entsprechende ADL-Form mit Störgrößen ε und schätzen Sie die Parameter mittels nichtlinearer OLS-Anpassung.

2. Die Produktionsfunktion $Y = \beta_1 + \beta_2 L + \beta_3 K + \beta_4 Y_{-1} + u$ kann auf Basis der AWM-Datenbasis geschätzt werden, wobei für Y die Zeitreihe YER (reales Brutto-Inlandsprodukt), für L die Zeitreihe LNN (Gesamtes Arbeitskräfte-Angebot) und für K die Zeitreihe KSR (Gesamter Kapitalbestand) verwendet wird. Die Störgrößen folgen einem AR(1)-Prozess $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ und Weißem Rauschen ε. Führen Sie die Übungen (a) bis (c) der Aufgabe 1 für die Produktionsfunktion aus.

18.A.2 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Ein ADL(1,1)-Modell hat die Form $Y_t = \alpha + \varphi Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t$, wobei $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ mit Weißem Rauschen ε. Zeigen Sie, dass es als ADL(2,2)-Modell mit den Störgrößen ε geschrieben werden kann.

2. Zeigen Sie, dass die Teststatistik

$$T = \hat{\varrho}\sqrt{\frac{n}{1 - n\,\mathrm{Var}\{\hat{\varphi}\}}}$$

mit Durbin's h nach (18.5.1) übereinstimmt; $\hat{\varrho}$ ist die Stichproben-Autokorrelation der Störgrößen.

18.B Hinweise zu `gretl` und `EViews`

18.B.1 Dynamische Modelle: Schätzen der Parameter

Beide Software-Pakete unterstützen das Schätzen der Parameter von dynamischen Modellen: Beide bieten Verfahren zum Schätzen von Modellen mit Lag-Strukturen; siehe die „Hinweise zu `gretl` und `EViews`" in Kapitel 13. Für das Schätzen von nichtlinearen Modellen stehen nichtlineare OLS-Algorithmen zur Verfügung.

Der NLKQ-Algorithmus in `gretl`

Zum Anwenden der nichtlinearen OLS-Schätzung klickt man im Hauptfenster die Schaltfläche Modell und dann den Menüpunkt `Nicht-lineare Modelle` an. Wählt man nun `Nicht-lineare Kleinstquadrate (NLS) ...`, so öffnet sich das Eingabe-Fenster `nicht-lineare KQ-Methode`, in der die zu schätzende Regressionsfunktion und gegebenenfalls ihre Ableitungen zu spezifizieren sind. Im Output-Fenster kann man sich neben den Schätzern der Modellparameter und anderen Ergebnissen die Details der einzelnen Iterationen anzeigen lassen.

Schätzen dynamischer Modelle in `EViews`

Das Schätzen der Parameter von dynamischen Modellen wird in mehrfacher Weise unterstützt: `EViews` erlaubt das Schätzen der Koeffizienten von Modellen mit korrelierten Störgrößen (siehe Kapitel 12) und das Spezifizieren einer polynomialen Lag-Struktur (siehe Kapitel 17). Die Koeffizienten nichtlinearer Modelle, die sich im Zusammenhang mit dynamischen Modellen oft ergeben, können mittels nichtlinearer OLS-Schätzung ermittelt werden. Dazu muss im Dialogfenster `Equation Estimation` die zu schätzende Modellgleichung explizit angegeben werden; als Parameter sind Komponenten des Koeffizientenvektors `c` zu verwenden. Unter `Options` ist die maximale Anzahl der Iterationen sowie das Abbruchkriterium festzulegen; Default-Werte sind vorgegeben. Im Output-Fenster des linearen Regressionsmodells werden ergänzend zum üblichen Inhalt die Anzahl der durchgeführten Iterationen und die verwendete Modellgleichung ausgegeben.

Anhang 18.A Der Gauß-Newton-Algorithmus

Der Gauß-Newton-Algorithmus wird dargestellt als Verfahren zur OLS-Schätzung der Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$ eines Modells

$$Y_t = f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) + u_t$$

mit einer in den Komponenten von $\boldsymbol{\theta}$ nichtlinearen Responsefunktion $f(\cdot)$. Zum Minimieren von

$$S(\theta) = \sum_{t=1}^{n}[Y_t - f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta})]^2$$

gibt es keine Lösung in geschlossener Form; es gibt eine Reihe von iterativen Verfahren zum Auffinden des Vektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, für den das Minimum erreicht wird.

Der Gauß-Newton-Algorithmus nähert sich dem Minimum an, indem er die nichtlineare Funktion durch eine lineare Funktion approximiert. Diese Approximation ergibt sich aus der Entwicklung der Funktion $f(\cdot)$ in eine Taylorreihe, die nach dem zweiten Summanden abgebrochen wird:

$$f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) \doteq f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum\nolimits_i \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i)\,.$$

Minimieren von

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\theta}) &= \sum\nolimits_t u_t^2 \doteq \sum\nolimits_t \left[Y_t - f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \sum\nolimits_i \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i)\right]^2 \\ &= \sum\nolimits_t \left[\hat{u}_t - \sum \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \Delta\theta_i\right]^2 \end{aligned}$$

(mit $\hat{u}_t = Y_t - f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ und $\Delta\theta_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$) entspricht dem Regressieren von $\hat{u}_t$ auf die Regressorvariablen

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad i = 1, \ldots, k$$