16.2.4 Parameterschätzung

Die Verfahren, die wir für das Schätzen der Parameter von Mehrgleichungs-Modellen verwenden, hängen einerseits von der Form des Modells ab, andererseits davon, ob Voraussetzungen, die für die Anwendbarkeit der verschiedenen Verfahren erfüllt sein müssen, als gegeben angesehen werden können oder nicht. Eine wesentliche Rolle spielen IV-Schätzer.

Eine oft verwendete Klassifikation der Schätzverfahren unterscheidet, ob das Verfahren gleichungsweise oder auf das System der Gleichungen als Ganzes angewendet wird.

- Einzelgleichungs-Verfahren
  - Indirekte OLS-Schätzung: Ermittlung von OLS-Schätzern der Koeffizienten jeder Gleichung der reduzierten Form; die Koeffizienten der Strukturform werden als Funktionen dieser OLS-Schätzer bestimmt
  - Zweistufige OLS-Schätzung oder 2SLS-Schätzung: Ermittlung von IV-Schätzern der Koeffizienten jeder Gleichung der Strukturform
  - LIML-Schätzung (*limited information maximum likelihood*)
- System-Schätzverfahren
  - Dreistufige OLS-Schätzung oder 3SLS-Schätzung
  - FIML-Schätzung (*full information maximum likelihood*)

Die Wahl des Schätzverfahrens hängt von Faktoren wie Umfang des Mehrgleichungs-Modells, Art und Umfang der verfügbaren Daten, Zutreffen von verschiedenen Voraussetzungen etc., aber auch von der Verfügbarkeit von Software ab und ist meist keine einfache Entscheidung.

ZUSAMMENFASSUNG

- **Praxis ökonometrischer Modelle:** Die in der Praxis interessierenden, ökonomischen Prozesse sind meistens so komplex, dass sie mittels einfacher Modelle wie einer linearen Regression nicht ohne Weiteres dargestellt werden können. Modelle, deren Spezifikation die in der Praxis auftretenden Prozesse entsprechend berücksichtigen, erfordern auch Anpassungen der ökonometrischen Methoden.
- **Modellerweiterungen:** Die in der ökonometrischen Praxis verwendeten Modelle unterscheiden sich in zwei Punkten vom linearen Regressionsmodell: (i) Dynamische Modelle berücksichtigen verzögerte Variablen, so dass sie – in Erweiterung der statischen Modelle – die zeitliche Dynamik von wirtschaftlichen Abläufen beschreiben können; (ii) Mehrgleichungs-Modelle erlauben es, Systeme darzustellen, in denen sich die Entwicklungen und Wechselwirkungen von mehr als einer endogenen Variablen beschreiben lassen.
- **Dynamische Modelle:** Sie machen von Konzepten Gebrauch wie (i) Lag-Strukturen, darunter der Koyck'schen Lag-Struktur, (ii) den ADL-Modellen, das sind um eine Lag-Struktur erweiterte AR-Modelle, und (iii) dem Fehlerkorrektur-Modell.
- **Mehrgleichungs-Modelle:** Wesentliche Aspekte von Mehrgleichungs-Modellen sind die unterschiedlichen Typen von Gleichungen, aus denen das Modell aufgebaut ist, die Identifizierbarkeit der Koeffizienten einer Gleichung und die verschiedenen Methoden, die zum Schätzen der Koeffizienten zur Verfügung stehen.

Wichtige Begriffe

- ADL-Modell
- dynamisches Modell
- endogene Variable
- exogene Variable
- Identifizierbarkeit
- Indirekte OLS-Schätzung
- Koyck'sche Lag-Struktur
- Lag-Strukturen
- Reaktionsgleichung
- statisches Modell
- Zweistufige OLS-Schätzung

AUFGABEN

16.A.1 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Zeigen Sie die Äquivalenz von

$$Y_t = \beta(1-\lambda)\sum \lambda^i X_{t-i} + u_t$$

und

$$Y_t = \lambda Y_{t-1} + \beta(1-\lambda)X_t + v_t$$

mit $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$.

2. Zeigen Sie, dass das ADL(1,1)-Modell

$$Y_t = \alpha + \varphi Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t$$

in das Fehlerkorrektur-Modell

$$\Delta Y_t = -(1-\varphi)(Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1}) + \beta_0 \Delta X_t + u_t$$

mit $\mu_0 = \alpha/(1-\varphi)$ und $\mu_1 = (\beta_0 + \beta_1)/(1-\varphi)$ umgeformt werden kann.

3. Zeigen Sie, dass der Koeffizient π_{11} der reduzierten Form des in Beispiel 16.3 gegebenen Marktmodells durch

$$\pi_{11} = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\beta_2 - \alpha_2}$$

gegeben ist; geben Sie analoge Ausdrücke für π_{ij}, $i = 1, 2$ und $j = 1, 2$, an.

4. Die Strukturform eines Marktmodells sei

$$Q = \alpha_1 + \alpha_2 P + \alpha_3 Y + u_1 \quad \text{(Nachfragefunktion)},$$
$$Q = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 Z + u_2 \quad \text{(Angebotsfunktion)},$$

wobei das Modell aus Beispiel 16.3 um die Variable Z erweitert ist, die wie Y eine exogene Variable ist und für den Preis eines konkurrierenden Produkts steht. (a) Leiten Sie die Koeffizienten der reduzierten Form ab; (b) stellen Sie die Koeffizienten der Strukturform als Funktionen der Koeffizienten der reduzierten Form dar.

17 Dynamische Modelle: Konzepte

ÜBERBLICK

17.1 Einleitung 296
17.2 Lag-Strukturen 297
17.3 Spezielle Lag-Strukturen 301
17.4 Modelle der Erwartungen 306
17.5 Das ADL-Modell 309
17.A Aufgaben 315
17.B Hinweise zu EViews 316

- **Modelle der Erwartungen:** Das Konzept der Erwartungen spielt in ökonomischen Anwendungen als adaptive Erwartung und als partielle Anpassung eine wichtige Rolle. Erwartungen können in ökonometrischen Modellen mit Hilfe von Lag-Strukturen berücksichtigt werden.
- **Das ADL-Modell:** Das ADL-Modell ist ein einfaches, aber sehr allgemein anwendbares Modell. Es besteht aus einem autoregressiven Teil und aus einer endlichen Lag-Struktur der unabhängigen Variablen. Spezialfälle des ADL-Modells sind die Regression mit korrelierten Störgrößen und die Modelle für Erwartungen. Das ADL-Modell lässt sich als Fehlerkorrektur-Modell schreiben, eine Darstellung der Dynamik des modellierten Prozesses als Funktion der Abweichungen vom Gleichgewichtszustand.

Wichtige Begriffe

- adaptive Erwartung
- ADL-Modell
- Almon'sche Lag-Struktur
- DL(s)-Modell
- equilibrium multiplier
- Fehlerkorrektur-Modell
- geometrische Lag-Struktur
- Gleichgewichtsbeziehung
- Gleichgewichtseffekt
- Gleichgewichtsfehler
- impact multiplier
- Koyck'sche Lag-Struktur
- Koyck-Transformation
- Lag-Struktur
- long run multiplier
- mediane Lag-Zeit
- Multikollinearität
- Multiplikator, multiplier
- Ordnung der Lag-Struktur
- partielle Anpassung
- polynomiale Lag-Struktur

AUFGABEN

17.A.1 Empirische Anwendungen

1. Der Datensatz DatS01 enthält die Variablen CR (Konsum) und YDR (Einkommen) für die Jahre 1976 bis 2001; transformieren Sie die Daten in Zuwachsraten.
   (a) Spezifizieren Sie ein DL(s)-Modell in YDR für CR und wählen Sie die Ordnung s mit Hilfe des Schwarz'schen Informationskriteriums.
   (b) Geben Sie den kurz- und langfristigen Multiplikator und die durchschnittliche Lag-Zeit an.
   (c) Ersetzen Sie die in (a) erhaltene Einkommens-Lag-Struktur durch eine polynomiale Lag-Struktur der Ordnung (i) Eins und (ii) Zwei und geben Sie jeweils den langfristigen Multiplikator und die durchschnittliche Lag-Zeit an.
   (d) Ersetzen Sie die Einkommens-Lag-Struktur durch das erwartete Einkommen YDR^e, das sich nach dem Konzept der adaptiven Erwartung ergibt, und geben Sie jeweils den langfristigen Multiplikator und die durchschnittliche Lag-Zeit an.
2. Der Datensatz DatS10 enthält die Variablen Q (Konsum von Schweinefleisch pro Kopf), P (Preis von Schweinefleisch) und Z (eine Determinante der Produktion von Schweinefleisch).
   (a) Spezifizieren Sie eine Angebotsfunktion mit einem DL(s)-Modell in P für Q und wählen Sie die Ordnung s mit Hilfe des Schwarz'schen Informationskriteriums.
   (b) Geben Sie den kurz- und langfristigen Multiplikator und die durchschnittliche Lag-Zeit an.
   (c) Ersetzen Sie P durch einen erwarteten Preis P^e, wobei Sie (i) die naive Erwartung $P_t^e = P_{t-1}$ verwenden und (ii) den erwarteten Preis nach dem Konzept der adaptiven Erwartung ermitteln. Geben Sie jeweils den langfristigen Multiplikator und die durchschnittliche Lag-Zeit an.

17.A.2 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Zeigen Sie, dass die Summe der Koeffizienten $\beta_i = \beta(1-\lambda)\lambda^i$ der geometrischen Lag-Struktur mit $0 < \lambda < 1$ den Wert β hat.
2. Zeigen Sie, dass sich im Modell (17.3.3) mit geometrischer Lag-Struktur (a) der Gleichgewichtseffekt zu β und (b) die durchschnittliche Lag-Zeit zu $\lambda/(1-\lambda)$ ergeben.
3. In Abschnitt 17.3 wird die Koyck-Transformation beschrieben. Führen Sie das Modell (17.3.3) mit geometrischer Lag-Struktur von der DL-Form in die AR-Form (17.3.4) über.
4. Die Investitionen seien eine Funktion der erwarteten Gewinne P^e: $I_t = \alpha + \beta P_{t+1}^e + \gamma r_t + u_t$, wobei die erwarteten Gewinne dem Konzept der adaptiven

Erwartung mit dem Anpassungsparameter λ $(0 < \lambda < 1)$ folgen: $P^e_{t+1} - P^e_t = (1-\lambda)(Y_t - P^e_t)$ (siehe Beispiel 17.8). Zeigen Sie, dass das Anwenden der Koyck-Transformation die AR-Form

$$C_t = \alpha(1-\lambda) + \lambda C_{t-1} + \beta(1-\lambda)P_t + \gamma r_t - \lambda\gamma r_{t-1} + v_t$$

der Investitionsfunktion mit $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$ liefert.

5. Zeigen Sie, dass das Lag-Polynom $\Phi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2$ in der Form $\Phi(L) = L\Phi(1) + (1-L)\psi(L)$ mit $\psi(L) = 1 + \varphi_2 L$ darstellbar ist.

6. Zeigen Sie, dass die Fehlerkorrektur-Form (17.5.5) des ADL(p, s)-Modells für $p = s = 1$ das Modell (17.5.4) ergibt.

17.B Hinweise zu EViews

17.B.1 Dynamische Modelle: Konzepte

Polynomiale Lag-Struktur in EViews

Mit Hilfe der Funktion `pdl` kann in einer Modellgleichung eine polynomiale Lag-Struktur spezifiziert werden. Dazu wird im Dialogfenster `Equation Estimation` die Funktion `pdl` wie eine Variable eingegeben. Sie enthält als Argumente den Namen der entsprechenden Zeitreihe, die Ordnung s der Lag-Struktur und die Ordnung r des Polynoms. Im Output-Fenster werden als Teil der Regressionsbeziehung die Koeffizienten der Lag-Struktur und im Anschluss an den Standard-Output die Ergebnisse zum geschätzten Polynom angegeben.

Dynamische Modelle: Schätzen der Parameter

18

ÜBERBLICK

18.1 Das AR(1)-Modell 318
18.2 Das DL(*s*)-Modell 319
18.3 Das ADL-Modell 322
18.4 Schätzen der Koyck'schen Lag-Struktur 326
18.5 Tests auf Autokorrelation 327
18.A Aufgaben 329
18.B Hinweise zu gretl und EViews 330
Anhang 18.A Der Gauß-Newton-Algorithmus 331

Durbin's h von -0.572; der entsprechende p-Wert beträgt 0.57, wenn wir von einer zweiseitigen Alternative ausgehen. Vermuten wir als Alternative eine positive Autokorrelation, dann wäre der p-Wert größer als 0.7. Wir können jedenfalls davon ausgehen, dass die Störgrößen unkorreliert sind.

18.5.2 Der Breusch-Godfrey-Test

Den Lagrange-Multiplier-Test von Breusch-Godfrey haben wir in Abschnitt 12.4 kennengelernt. Er ist auf dynamische Modelle anwendbar. Die Teststatistik ist

$$\mathrm{LM}(A) = nR_e^2 ,$$

wobei R_e^2 das Bestimmtheitsmaß aus der Regression der OLS-Residuen e_t auf Y_{t-1}, X_t und die verzögerten Residuen e_{t-1} ist. Unter H_0 folgt die Teststatistik LM(A) asymptotisch der Chi-Quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad, die wir bei großem n als näherungsweise Verteilung von LM(A) verwenden:

$$\mathrm{LM}(A) \mathrel{\dot\sim} \chi^2(1) .$$

Bei Verallgemeinerung des Prozesses der Störgrößen auf einen AR(p)-Prozess kann zum Test auf serielle Korrelation der Störgrößen wiederum die Teststatistik

$$\mathrm{LM}(A) = nR_e^2$$

verwendet werden. Basis ist hier das Bestimmtheitsmaß R_e^2 der Regression der OLS-Residuen e_t auf Y_{t-1}, X_t und die verzögerten Residuen $e_{t-1}, \dots, e_{t-p}$. Als näherungsweise Verteilung der Teststatistik verwenden wir die unter H_0 asymptotische Chi-Quadrat-Verteilung mit p Freiheitsgraden:

$$\mathrm{LM}(A) \mathrel{\dot\sim} \chi^2(p) .$$

ZUSAMMENFASSUNG

- **Inferenz bei dynamischen Modellen**: Spezifische Verfahren der statistischen Inferenz bei dynamischen Modellen betreffen das Schätzen der Modellparameter und die Eigenschaften unterschiedlicher Schätzverfahren sowie das Testen auf Autokorrelation der Störgrößen.
- **Schätzer für dynamische Modelle**: Die OLS-Schätzer der Koeffizienten eines autoregressiven Modells sind konsistent, aber nicht erwartungstreu. Bei zusätzlicher Autokorrelation der Störgrößen, was bei dynamischen Modellen realistischerweise oft angenommen werden muss, sind die OLS-Schätzer auch nicht konsistent. Alternative Schätzverfahren sind die verallgemeinerte Kleinste-Quadrate- oder GLS-Schätzung und die Instrumentvariablen- oder IV-Schätzung; auch nichtlineare Modellgleichungen können sich ergeben, bei denen Verfahren wie die nichtlineare OLS-Schätzung angewendet werden müssen.

Der Cochrane-Orcutt-Schätzer ist ein Beispiel für einen FGLS-Schätzer. Die behandelten Verfahren erlauben das Schätzen der Parameter von DL- und von ADL-Modellen.

- **Testen auf Autokorrelation**: Dynamische Modelle enthalten oft eine autoregressive Komponente. In dieser Situation ist die Teststatistik des Durbin-Watson-Tests verzerrt. Daher wurden Testverfahren auf Autokorrelation der Störgrößen entwickelt, die auf autoregressive Modelle angewendet werden können. Dazu gehören Durbin's h-Test, ein Test auf Autokorrelation der Ordnung Eins, und der Breusch-Godfrey-Test, der auch Autokorrelationen höherer Ordnung zulässt.

Wichtige Begriffe

- ADL-Modell
- Breusch-Godfrey-Test
- Cochrane-Orcutt-Schätzer
- DL(s)-Modell
- Durbin's h-Test
- Durbin-Watson-Test
- FGLS-Schätzung
- Gauß-Newton-Algorithmus
- IV-Schätzung
- Koyck'sche Lag-Struktur
- Quasi-Differenzen

AUFGABEN

18.A.1 Empirische Anwendungen

1. Die Investitionsfunktion $I = \beta_1 + \beta_2 L_{-1} + \beta_3 L_{-2} + \beta_4 Y + u$ kann auf Basis der AWM-Datenbasis geschätzt werden, wobei für I die Zeitreihe ITR (reale Brutto-Investitionen) und für Y die Zeitreihe YER (reales Brutto-Inlandsprodukt) verwendet wird. Die Störgrößen folgen einem AR(1)-Prozess $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ und Weißem Rauschen ε.

(a) Schätzen Sie das Modell (i) mittels OLS-Schätzung so, als wären die Störgrößen u Weißes Rauschen, (ii) mittels der Cochrane-Orcutt-Schätzung, (iii) mittels der Prais-Winsten-Methode und (iv) mittels IV-Schätzung, wobei Sie als Instrumente verzögerte Variablen YER verwenden.

21 -~ AR(1)

(b) Führen Sie für das nach (i) geschätzte Modell aus Übung (a) einen Test auf serielle Korrelation der Störgrößen (i) mittels Durbin's h und (ii) mittels der Teststatistik von Breusch-Godfrey durch.

(c) Bringen Sie die Investitionsfunktion in die entsprechende ADL-Form mit Störgrößen ε und schätzen Sie die Parameter mittels nichtlinearer OLS-Anpassung.

2. Die Produktionsfunktion $Y = \beta_1 + \beta_2 L + \beta_3 K + \beta_4 Y_{-1} + u$ kann auf Basis der AWM-Datenbasis geschätzt werden, wobei für Y die Zeitreihe YER (reales Brutto-Inlandsprodukt), für L die Zeitreihe LNN (Gesamtes Arbeitskräfte-Angebot) und für K die Zeitreihe KSR (Gesamter Kapitalbestand) verwendet wird. Die Störgrößen folgen einem AR(1)-Prozess $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ und Weißem Rauschen ε. Führen Sie die Übungen (a) bis (c) der Aufgabe 1 für die Produktionsfunktion aus.

18.A.2 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Ein ADL(1,1)-Modell hat die Form $Y_t = \alpha + \varphi Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t$, wobei $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$ mit Weißem Rauschen ε. Zeigen Sie, dass es als ADL(2,2)-Modell mit den Störgrößen ε geschrieben werden kann.

2. Zeigen Sie, dass die Teststatistik

$$T = \hat{\varrho}\sqrt{\frac{n}{1 - n\,\mathrm{Var}\{\hat{\varphi}\}}}$$

mit Durbin's h nach (18.5.1) übereinstimmt; $\hat{\varrho}$ ist die Stichproben-Autokorrelation der Störgrößen.

18.B Hinweise zu `gretl` und `EViews`

18.B.1 Dynamische Modelle: Schätzen der Parameter

Beide Software-Pakete unterstützen das Schätzen der Parameter von dynamischen Modellen: Beide bieten Verfahren zum Schätzen von Modellen mit Lag-Strukturen; siehe die „Hinweise zu `gretl` und `EViews`" in Kapitel 13. Für das Schätzen von nichtlinearen Modellen stehen nichtlineare OLS-Algorithmen zur Verfügung.

Der NLKQ-Algorithmus in `gretl`

Zum Anwenden der nichtlinearen OLS-Schätzung klickt man im Hauptfenster die Schaltfläche Modell und dann den Menüpunkt `Nicht-lineare Modelle` an. Wählt man nun `Nicht-lineare Kleinstquadrate (NLS) ...`, so öffnet sich das Eingabe-Fenster `nicht-lineare KQ-Methode`, in der die zu schätzende Regressionsfunktion und gegebenenfalls ihre Ableitungen zu spezifizieren sind. Im Output-Fenster kann man sich neben den Schätzern der Modellparameter und anderen Ergebnissen die Details der einzelnen Iterationen anzeigen lassen.

Schätzen dynamischer Modelle in `EViews`

Das Schätzen der Parameter von dynamischen Modellen wird in mehrfacher Weise unterstützt: `EViews` erlaubt das Schätzen der Koeffizienten von Modellen mit korrelierten Störgrößen (siehe Kapitel 12) und das Spezifizieren einer polynomialen Lag-Struktur (siehe Kapitel 17). Die Koeffizienten nichtlinearer Modelle, die sich im Zusammenhang mit dynamischen Modellen oft ergeben, können mittels nichtlinearer OLS-Schätzung ermittelt werden. Dazu muss im Dialogfenster `Equation Estimation` die zu schätzende Modellgleichung explizit angegeben werden; als Parameter sind Komponenten des Koeffizientenvektors `c` zu verwenden. Unter `Options` ist die maximale Anzahl der Iterationen sowie das Abbruchkriterium festzulegen; Default-Werte sind vorgegeben. Im Output-Fenster des linearen Regressionsmodells werden ergänzend zum üblichen Inhalt die Anzahl der durchgeführten Iterationen und die verwendete Modellgleichung ausgegeben.

Anhang 18.A Der Gauß-Newton-Algorithmus

Der Gauß-Newton-Algorithmus wird dargestellt als Verfahren zur OLS-Schätzung der Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ eines Modells

$$Y_t = f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) + u_t$$

mit einer in den Komponenten von $\boldsymbol{\theta}$ nichtlinearen Responsefunktion $f(\cdot)$. Zum Minimieren von

$$S(\theta) = \sum_{t=1}^{n}[Y_t - f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta})]^2$$

gibt es keine Lösung in geschlossener Form; es gibt eine Reihe von iterativen Verfahren zum Auffinden des Vektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, für den das Minimum erreicht wird.

Der Gauß-Newton-Algorithmus nähert sich dem Minimum an, indem er die nichtlineare Funktion durch eine lineare Funktion approximiert. Diese Approximation ergibt sich aus der Entwicklung der Funktion $f(\cdot)$ in eine Taylorreihe, die nach dem zweiten Summanden abgebrochen wird:

$$f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) \doteq f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i)\,.$$

Minimieren von

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_t u_t^2 \doteq \sum_t \left[Y_t - f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i)\right]^2$$
$$= \sum_t \left[\hat{u}_t - \sum \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \Delta\theta_i\right]^2$$

(mit $\hat{u}_t = Y_t - f(\mathbf{x}_t; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ und $\Delta\theta_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$) entspricht dem Regressieren von $\hat{u}_t$ auf die Regressorvariablen

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad i = 1, \dots, k$$

den integrierten Variablen stellt eine Gleichgewichtsbeziehung dar: Sie wird – bis auf Irregularitäten, die keine in die Zukunft reichenden Auswirkungen haben – innerhalb jeder Beobachtungsperiode eingehalten.

- **Fehlerkorrektur-Modell und Kointegration:** Fehlerkorrektur-Modelle sind auf der Basis von nichtstationären Variablen spezifiziert. Die Modelle erlauben es uns, die Änderungen einer differenz-stationären abhängigen Variablen als Effekt (i) der Änderungen der Regressoren und (ii) von teilweisen Anpassungen an Gleichgewichtsfehler in der Vorperiode darzustellen, wenn eine Gleichgewichtsbeziehung zwischen der abhängigen Variablen und den Regressoren gefunden werden kann, die Variablen also kointegriert sind. ADL-Modelle, die wichtige Klasse von Modellen zum Beschreiben von dynamischem Verhalten, können in der Fehlerkorrektur-Form dargestellt werden.
- **Test auf Kointegration:** Zum Feststellen der Ordnung der Integration von Zeitreihen werden *Unit-root*-Tests verwendet. Der Test auf Kointegration macht davon Gebrauch: Ein *Unit-root*-Test wird auf die Residuen der vermuteten Gleichgewichtsbeziehung angewendet. Da Kointegration davon ausgeht, dass die Variablen integriert von der gleichen Ordnung sind, wird vor dem Schätzen der vermuteten Gleichgewichtsbeziehung mittels *Unit-root*-Test die Ordnung der Integration der einzelnen Variablen festgestellt.
- **Schätzen des Fehlerkorrektur-Modells:** Zum Schätzen der Parameter kann das Engle-Granger-Verfahren verwendet werden, mit dem das Fehlerkorrektur-Modell in einem mehrstufigen Verfahren an die Daten angepasst wird.

Wichtige Begriffe

- Engle-Granger-Test
- Engle-Granger-Verfahren
- Fehlerkorrektur-Form
- Gleichgewichtsbeziehung
- Gleichgewichtsfehler
- integrierter Prozess
- Kointegrations-Test
- kointegrierender Vektor
- Ordnung der Integration
- random-walk-Prozess
- spurious-regression-Problem

AUFGABEN

19.A.1 Empirische Anwendungen

1. Die Konsumgleichung des AW-Modells ist im Anhang A als Gleichung (A.1.1) angegeben. Die modifizierte Gleichgewichtsbeziehung dieses Modells lautet $\log(\text{PCR}) = \mu_1 + \mu_2 \log(\text{PYR})$, wobei PCR der reale Private Konsum und PYR das reale Verfügbare Einkommen der Haushalte ist. Überprüfen Sie, ob PCR und PYR (i) gleiche Ordnung der Integration haben und (ii) kointegrierte Variable sind; (iii) zeichnen Sie ein Zeitreihendiagramm der Residuen der modifizierten Gleichgewichtsbeziehung und interpretieren Sie das Diagramm aus der Sicht des Ergebnisses von (ii).

S.406

2. Der Datensatz `DatS01` enthält die Variablen CR (Privater Konsum) und YDR (Verfügbares Einkommen). Wiederholen Sie die Aufgabe 1 für CR und YDR.

3. Erzeugen Sie für den Sample-Bereich des Datensatzes `DatS01` Realisationen des *random walk* $\text{RW}_t = \text{RW}_{t-1} + u_t$; u ist Weißes Rauschen mit einer Standardabweichung von 200. Überprüfen Sie, ob (i) CR und und RW, (ii) YDR und RW kointegrierte Variablen sind.

4. Schätzen Sie ein Fehlerkorrektur-Modell für die Konsumgleichung des AW-Modells, wobei Sie die modifizierte Gleichgewichtsbeziehung verwenden; siehe Aufgabe 1.

5. Gehen Sie von der Fragestellung von Aufgabe 1 aus, wobei die Gleichgewichtsbeziehung der Konsumgleichung spezifiziert ist als $\log(\text{PCR}) = \mu_1 + \mu_2 \log(\text{PYR}) + \mu_3 \log(\text{WLN}/\text{PCD})$.

(a) Überprüfen Sie, ob PCR, PYR und WLN / PCD kointegrierte Variablen sind.

(b) Schätzen Sie ein Fehlerkorrektur-Modell für die Konsumgleichung (A.1.1) des AW-Modells.

6. Verwenden Sie die Variablen CR und RW aus Aufgabe 3. Schätzen Sie ein Fehlerkorrektur-Modell für CR als Funktion von RW.

19.B Hinweise zu EViews

19.B.1 Kointegration

In beiden Software-Paketen können alle in diesem Kapitel behandelten Verfahren ausgeführt werden. Für alle Verfahrensschritte des Engle-Granger-Verfahrens, das Feststellen der Integrations-Ordnung der Zeitreihen, das Schätzen der Gleichgewichtsbeziehung, das Testen auf Kointegration und das Schätzen des Fehlerkorrektur-Modells stehen Methoden zur Verfügung, die wir auch bereits in früheren Kapiteln besprochen haben. Im Zusammenhang mit den Vektor-autoregressiven Modellen werden in Kapitel 22 umfassendere Möglichkeiten behandelt, die den univariaten Fall dieses Kapitels einschließen.

Kointegration in `EViews`

Zum Schätzen von kointegrierenden Beziehungen stehen in `EViews` Verfahren zur Verfügung, die im Dialogfenster `Equation Estimation` durch Auswahl von `COINTREG - Cointegrating Regression` als **Schätzmethode aufgerufen** werden können. Tests auf **Kointegration können** im **Output-Fenster unter** `View` durch Anklicken von `Cointegration Tests ...` aufgerufen werden.

20

Mehrgleichungs-Modelle: Konzepte

ÜBERBLICK

20.1 Einleitung ... 346
20.2 Typen von Variablen ... 350
20.3 Multivariate Regressionsmodelle ... 352
20.4 Interdependente Mehrgleichungs-Modelle ... 353
20.5 Identifizierbarkeit ... 355
20.6 Kriterien der Identifizierbarkeit ... 358
20.A Aufgaben ... 363

ZUSAMMENFASSUNG

- **Konzeptionelle Fragen:** Beim praktischen Modellieren von ökonomischen Prozessen sollen oft die Entwicklungen und Wechselwirkungen von mehr als einer endogenen Variablen gemeinsam dargestellt werden. Dann ergibt sich die Notwendigkeit, ein Modell mit mehreren Gleichungen gemeinsam zu spezifizieren und zu analysieren. Die konzeptionellen Fragen, die sich beim Spezifizieren von Mehrgleichungs-Modellen ergeben, betreffen die unterschiedlichen Typen von Modellen, die Klassifizierung der Modellvariablen und Fragen, die das Schätzen der Modellparameter betreffen.
- **Multivariate Regressionsmodelle:** Ihr Charakteristikum ist, dass endogene Variablen bei diesen Modellen unter den Regressoren nicht vorkommen. Zu dieser Klasse von Mehrgleichungs-Modellen gehört das *seemingly unrelated regression* oder SUR-Modell; ein Spezialfall liegt vor, wenn alle Gleichungen des Modells die gleichen Regressoren verwenden.
- **Simultane Mehrgleichungs-Modelle:** Der zweite und interessantere Typ von Mehrgleichungs-Modellen sind die interdependenten oder simultanen Mehrgleichungs-Modelle. Sie verwenden endogene Variablen als Regressor. Eine Folge davon ist, dass die OLS-Schätzer ihrer Koeffizienten nicht konsistent sind.
- **Identifizierbarkeit:** Die Frage, unter welchen Bedingungen mit konsistenten Schätzern der Strukturparameter gerechnet werden kann, ist auch die Frage nach der Identifizierbarkeit einer Modellgleichung beziehungsweise ihrer Parameter. Kriterien der Identifizierbarkeit wie die Abzähl- oder Ordnungsbedingung und die Rangbedingung laufen auf das Ausführen von Operationen der linearen Algebra hinaus.

Wichtige Begriffe

- Abzählkriterium
- definitorische Identität
- endogene Variable
- exogene Variable
- Gleichgewichtsbedingung
- identifizierbar
- Interdependentes Mehrgleichungs-Modell
- Klein's Modell 1
- Modellsstruktur
- Multivariates Regressionsmodell
- Ordnungskriterium
- Rangbedingung
- Reaktionsgleichung
- reduzierte Form
- rekursives Mehrgleichungs-Modell
- scheinbar unverbundenes Regressionsmodell
- simultanes Mehrgleichungs-Modell
- Strukturform
- SUR-Modell
- Verhaltensgleichung
- Vollständigkeit
- vorherbestimmte Variable

AUFGABEN

20.A.1 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Das Mehrgleichungs-Modell

$$Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 X + u_1$$
$$Y_2 = \beta_1 Y_1 + \beta_2 X + u_2$$

enthält die endogenen Variablen Y_1 und Y_2 sowie die exogene Variable X.

(a) Geben Sie die reduzierte Form des Modells an und schreiben Sie deren Parameter als Funktionen der Strukturparameter an.

(b) Schreiben Sie die Strukturparameter als Funktionen der Parameter der reduzierten Form an.

(c) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.

(d) Zeigen Sie, dass die zweite Gleichung identifiziert ist, wenn $\beta_2 = 0$. Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der ersten Gleichung in diesem Fall und erklären Sie das Ergebnis.

2. Zeigen Sie, dass für den Schätzer b_2 des Parameters β_2 der Angebotsfunktion im Modell von Beispiel 20.12 die beiden Lösungen

$$b_2 = \frac{\hat{\pi}_{12}}{\hat{\pi}_{22}}, \quad b_2 = \frac{\hat{\pi}_{13}}{\hat{\pi}_{23}}$$

existieren.

3. Das Mehrgleichungs-Modell

$$Y_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} Y_3 + u_1$$
$$Y_2 = \alpha_{21} + \alpha_{22} Y_1 + \alpha_{23} Y_3 + \alpha_{24} X_1 + u_2$$
$$Y_3 = \alpha_{31} X_2 + u_3$$

enthält die endogenen Variablen Y_1, Y_2 und Y_3 sowie die exogenen Variablen X_1 und X_2.

(a) Geben Sie die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{\Gamma}$ der Strukturparameter an. Zeigen Sie, dass es sich um ein rekursives Gleichungssystem handelt.
(b) Geben Sie die reduzierte Form des Modells an und schreiben Sie die Elemente der Matrix $\boldsymbol{\Pi}$ als Funktionen der Strukturparameter an.
(c) Schreiben Sie die Strukturparameter als Funktionen der Elemente der Matrix $\boldsymbol{\Pi}$ an.
(d) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.

4. Das simultane Mehrgleichungs-Modell

$$\begin{aligned} C &= \alpha_1 + \alpha_2 Y + u_1 \\ I &= \beta_1 + \beta_2 Y + \beta_3 G_{-1} + u_2 \\ Y &= C + I + G \end{aligned}$$

verknüpft die Variablen C (Konsum), Y (Einkommen), I (Investitionen) und G (Staatsausgaben).

(a) Legen Sie fest, welche Variablen endogen, exogen und vorherbestimmt sind, und geben Sie die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{\Gamma}$ der Strukturparameter an.
(b) Formen Sie das Modell in seine reduzierte Form um und geben Sie die Matrix $\boldsymbol{\Pi}$ an.
(c) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.
(d) Bestimmen Sie den Effekt einer Änderung der Staatsausgaben ($\Delta G = 1$) auf C, Y und I in den nächsten beiden Perioden.

5. Das IS-LM-Modell umfasst folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_t &= \gamma_{11} - \alpha_{14} Y_t + u_{t1} \\ I_t &= \gamma_{21} - \alpha_{23} R_t + u_{t2} \\ R_t &= -\alpha_{34} Y_t + \gamma_{32} M_t + u_{t3} \\ Y_t &= C_t + I_t + Z_t \end{aligned}$$

mit C (Konsum), I (Brutto-Investitionen), R (Zinssatz), Y (Einkommen), M (Geldmenge), Z (autonome Ausgaben). Endogen sind C, I, R und Y, exogen sind 1, M und Z.

(a) Formen Sie das Modell in seine reduzierte Form um und geben Sie die Matrix $\boldsymbol{\Pi}$ an.
(b) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.

6. Schreiben Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n$ des $2n$-Vektors $\bar{\mathbf{u}}$ aus Gleichung (20.3.3) aus, wobei für den Vektor $\mathbf{u}_t = (u_{t1}, u_{t2})'$ gilt:

$$\mathrm{Var}\{\mathbf{u}_t\} = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

7. Die (3×3)-Matrix $\mathbf{A}$ eines Mehrgleichungs-Modells habe eine Dreiecksform mit Einsen in der Hauptdiagonale und den Elementen a, b und c unterhalb der Hauptdiagonale; die Matrix $\boldsymbol{\Gamma}$ sei von der Ordnung 1×3. Schreiben Sie die Strukturform des Modells in Langform und interpretieren Sie den Satz: „In einem rekursiven Mehrgleichungs-Modell beeinflussen sich die endogenen Variablen nur in einer Richtung."

dung entsprechender Hilfsvariablen für diese Regressoren gelöst. Das geläufigste Verfahren ist die 2SLS-Schätzung.

- **Methoden bei voller Information:** Die 3SLS-Schätzung und andere Methoden zur Schätzung bei voller Information schätzen die Parameter sämtlicher Gleichungen gemeinsam. Dabei wird die Kovarianzmatrix der Störgrößen geschätzt und die Strukturparameter werden in einer FGLS-Schätzung ermittelt.

Wichtige Begriffe

- 2SLS-Schätzung
- 3SLS-Schätzung
- Bestimmtheitsmaß
- Einzelgleichungs-Schätzverfahren
- FGLS-Schätzer
- FIML-Schätzung
- GLS-Schätzer
- indirekte OLS-Schätzung
- iterative 3SLS-Schätzung
- LIML-Schätzung
- Simultane Schätzverfahren
- SUR-Modell
- System-Schätzverfahren

AUFGABEN

21.A.1 Empirische Anwendungen

1. Der Datensatz DatS11 enthält die Variablen INVxx (Investitionen), VALxx (Marktwert des Unternehmens am Ende der Vorperiode), CAPxx (Anlagenwert des Unternehmens am Ende der Vorperiode) von vier US-amerikanischen Unternehmen für die Jahre 1935 bis 1954; für „xx" stehen Abkürzungen der Firmennamen. Die Daten sind Teil des Datensatzes von Grunfeld (1958).

(a) Schätzen Sie die Koeffizienten des Modells

$$\text{INV} = \beta_0 + \beta_1 \text{VAL} + \beta_2 \text{CAP} + u$$

mittels OLS-Anpassung für jedes der vier Unternehmen.

(b) Schätzen Sie die Koeffizienten der Gleichungen für die vier Unternehmen gemeinsam unter Verwendung der GLS-Schätzung; bestimmen Sie zu dieser multivariaten Regression das Bestimmtheitsmaß (21.1.5).

(c) Wiederholen Sie die Aufgabe (b) für nur drei Unternehmen (ohne US Steel) und diskutieren Sie die Unterschiede zu den Ergebnissen. Bestimmen Sie auch zu diesem Modell das Bestimmtheitsmaß (21.1.5).

2. Kleins Modell 1 umfasst folgende sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
C_t &= \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \alpha_4 (W_t^p + W_t^g) + u_{t1} \quad \text{(Konsum)}\\
I_t &= \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 P_{t-1} + \beta_4 K_{t-1} + u_{t2} \quad \text{(Investitionen)}\\
W_t^p &= \gamma_1 + \gamma_2 X_t + \gamma_3 X_{t-1} + \gamma_4 t + u_{t3} \quad \text{(Private Löhne und Gehälter)}\\
X_t &= C_t + I_t + G_t\\
K_t &= I_t + K_{t-1}\\
P_t &= X_t - W_t^p - T_t
\end{aligned}$$

Die verwendeten Variablen sind C (Ausgaben für Konsum), P (Gewinne), W^p (Private Löhne und Gehälter), W^g (Öffentliche Löhne und Gehälter), I (Investitionen), K_{-1} (Kapitalbestand des Vorjahres), X (Private Produktion), G (Ausgaben der Öffentlichen Hand ohne Löhne und Gehälter), T (Steuern) und t [Zeit (Trend)]. Der Datensatz DatS09 enthält die entsprechenden Daten für die Jahre 1920 bis 1941. Endogene Variablen sind C, P, W^p, I, X, K.

(a) Überprüfen Sie die Identifizierbarkeit der Gleichungen mittels Rang- und Ordnungsbedingung.

(b) Schätzen Sie die Parameter der Strukturgleichungen mittels (i) indirekter OLS-Schätzung, (ii) 2SLS-Schätzung, (iii) 3SLS-Schätzung, (iv) iterativer 3SLS-Schätzung und (v) FIML-Schätzung. Vergleichen Sie die Ergebnisse und geben Sie die Vor- und Nachteile der Verfahren an.

21.A.2 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Zeigen Sie, dass sich aus dem Bestimmtheitsmaß R_I^2 nach (21.1.5) für $m = 1$ das Bestimmtheitsmaß R^2 nach (5.3.1) ergibt.

21.B Hinweise zu `gretl` und `EViews`

21.B.1 Mehrgleichungs-Modelle: Schätzverfahren

Beide Software-Pakete unterstützen das Schätzen der Parameter von Mehrgleichungs-Modellen: Sie

- erlauben das Spezifizieren eines Systems von Gleichungen und
- stellen die gängigen Schätzverfahren zur Verfügung.

In beiden Software-Paketen werden mit der OLS-Schätzung die Koeffizienten der Einzelgleichungen unter Berücksichtigung von *cross equation* Restriktionen geschätzt, mit der Gewichteten OLS-Schätzung (*equation weighted regression*) die Koeffizienten der Einzelgleichungen unter Berücksichtigung von *cross equation* Heteroskedastizität; die SUR-Schätzung berücksichtigt *cross equation* Heteroskedastizität und kontemporäre Korrelation.

Mehrgleichungs-Modelle in `gretl`

Das Spezifizieren der Gleichungen erfolgt durch Anklicken von **Modell** im Hauptfenster und Auswahl von `Mehrgleichungssystem...`. Damit öffnet sich das Dialogfenster `Mehrgleichungssystem`, in dem die Modellgleichungen spezifiziert werden und das Schätzverfahren auszuwählen ist.

- Modell-Spezifikation: Im Dialogfenster werden die einzelnen Gleichungen definiert, wobei jede Zeile mit `equation` beginnt und eine Gleichung enthält. Die Gleichungen werden in ihrer Strukturform eingegeben. Eine Liste der endogenen Variablen kann in einer Zeile spezifiziert werden, die mit `endog` beginnt.
- Im Eingabefeld `Schätzer` können als Schätzverfahren ausgewählt werden: OLS, WLS, SUR, TSLS, LIML, 3SLS und FIML.

Nach Bestätigung der Eingaben erscheint das Output-Fenster, das neben der Beschreibung der verwendeten Methode und allgemeinen Kriterien die einzelnen Gleichungen angibt.

Mehrgleichungs-Modelle in `EViews`

Mehrgleichungs-Modelle werden in `EViews` in einem eigenen Objekt behandelt, dem System-Objekt.

- Modell-Spezifikation: Zum Spezifizieren eines Mehrgleichungs-Modells wird durch Anklicken von `System` in `Objects/New Object` ein Objekt vom Typ System generiert und das Eingabefenster geöffnet. In diesem Fenster sind die einzelnen Modellgleichungen zu definieren: Sie werden in ihrer Strukturform und in der in `EViews` üblichen Notation für Modellgleichungen geschrieben; die Koeffizienten sind Elemente des Koeffizientenvektors `c`. Benötigt das anzuwendende Schätzverfahren Instrumente, so ist unter `inst` oder `@inst` die Liste der Instrumente einzugeben.

- Schätzen der Parameter: Nach der Spezifikation des Modells kann man durch Anklicken das Eingabefenster `System estimation` öffnen, in dem die Schätzmethode ausgewählt und gegebenenfalls die Iterationsoptionen festgelegt werden. Als Schätzverfahren können gewählt werden: OLS, WLS, SUR, TSLS, LIML, 3SLS, FIML und andere.

Nach Bestätigung der Eingaben erscheint das Output-Fenster, das neben der Beschreibung der verwendeten Methode und der Liste der geschätzten Koeffizienten verschiedene Kriterien zu den einzelnen Gleichungen enthält.

Die erklärten Größen dieses VEC-Modells sind die jährlichen Zuwachsraten von Y und C, also die gleichen Größen wie in Beispiel 22.2. Der Wert des Informationskriteriums von Akaike ist daher ein geeignetes Kriterium zum Vergleich des VAR-Modells aus Beispiel 22.2 mit dem hier geschätzten VEC-Modell. Für das in der Tabelle 22.2 beschriebene Modell ergibt sich das Informationskriterium von Akaike zu $AIC = -15.48$, also ein deutlich kleinerer Wert als die -14.49 für das VAR(1)-Modell in Beispiel 22.2. Der Vergleich der AIC-Werte für das Modell für den Konsum aus dem VAR(1)-Modell (-6.99) fällt deutlich zugunsten des VEC(1)-Modells aus.

ZUSAMMENFASSUNG

- **Dynamische Mehrgleichungs-Modelle**: Dynamische Modelle für einen Vektor von Variablen sind die Verallgemeinerung des univariaten, dynamischen Eingleichungs-Modells. Ausgangspunkt ist das vektor-autoregressive oder VAR-Modell: Die Beziehungen zwischen den Komponenten eines VAR-Modells sind die Modellgleichungen des dynamischen Mehrgleichungs-Modells. Mit VAR-Modellen können dynamische Beziehungen zwischen ökonomischen Größen spezifiziert werden, ohne explizite Annahmen über Endogenität oder Exogenität der Variablen und über strukturelle Abhängigkeiten zwischen ihnen treffen zu müssen.
- **Repräsentations-Theorem von Granger**: Besonders interessieren VAR-Modelle, die für nichtstationäre Variablen spezifiziert sind. Falls diese Variablen $I(1)$-integriert sind, können zwischen ihnen kointegrierende Beziehungen existieren, die stationär sind und Gleichgewichtsbeziehungen darstellen. Das Repräsentations-Theorem von Granger gibt Bedingungen an, unter denen solche kointegrierenden Beziehungen existieren, und das auch zeigt, wie die kointegrierenden Beziehungen in Abhängigkeit von einem Datensatz definiert werden können.
- **VEC-Modelle**: Existieren zwischen den Variablen eines VAR-Modells kointegrierende Beziehungen, so kann das VAR-Modell – wie im univariaten Fall – in der Form eines Fehlerkorrektur-Modells dargestellt werden, das dann Vektor-Fehlerkorrektur- oder kurz VEC-Modell genannt wird.
- **Schätzen eines VEC-Modells**: Das Verfahren zum Schätzen der Parameter eines VEC-Modells läuft in mehreren Schritten ab: Im ersten Schritt ist die Entscheidung über die Anzahl der kointegrierenden Beziehungen, der sogenannte Kointegrationsrang, zu treffen. Dafür wird die R3-Methode von Johansen verwendet, auch Johansen-Test genannt. In den weiteren Schritten werden die kointegrierenden Beziehungen, so solche gefunden wurden, und schließlich die Parameter des VEC-Modells geschätzt.

Wichtige Begriffe

- Adaptionsparameter
- Charakteristisches Polynom
- Johansen's Test
- Kointegrationsrang
- kointegrierende Beziehung
- kointegrierender Vektor
- Max-Test
- R3-Methode
- Repräsentations-Theorem von Granger
- Spur-Test
- Trace-Test
- VAR-Modell
- VEC-Modell

AUFGABEN

22.A.1 Empirische Anwendungen

1. Schätzen Sie ein VAR-Modell für die ersten Differenzen Δ CR und Δ YDR aus `DatS01`; verwenden Sie (i) ein VAR(1)-Modell und (ii) ein VAR(2)-Modell.

2. Der Datensatz `DatS12` enthält vierteljährliche Zeitreihen GDP (Brutto-Inlandsprodukt, Y), M3 (Geldmenge M3, M), RSBN (langfristiger Zinssatz, R) und R3M (kurzfristiger Zinssatz, R 3); die Reihen GDP und M3 sind saisonbereinigt.

   (a) Schätzen Sie ein VAR-Modell für die Jahresdifferenzen von $\log(M)$ und $\log(Y)$.

   (b) Führen Sie Johansen's Test für die Datenreihen $\log(M)$ und $\log(Y)$ durch.

   (c) Schätzen Sie ein VEC-Modell für die Variablen $\log(M)$ und $\log(Y)$.

3. Untersuchen Sie für den Datensatz `DatS12` den vierkomponentigen Vektor mit den Variablen $\log(M)$, $\log(Y)$, R und R 3:

   (a) Schätzen Sie ein VAR-Modell für die Jahresdifferenzen von $\log(M)$, $\log(Y)$, R, und R 3.

   (b) Führen Sie Johansen's Test für die Datenreihen $\log(M)$, $\log(Y)$, R und R 3 durch.

   (c) Schätzen Sie ein VEC-Modell für $\log(M)$, $\log(Y)$, R und R 3.

22.A.2 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Zeigen Sie, dass das Mehrgleichungs-Modell $\mathbf{A}\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{z}_t + \mathbf{u}_t$, das als vorherbestimmte Variable nur um eine Periode verzögerte endogene Variable enthält, in ein Modell (22.1.1) mit konstantem $\boldsymbol{\mu}$ umgeformt werden kann.
2. Zeigen Sie, dass $z_1 = 1/\varrho_1$ und $z_2 = 1/\varrho_2$ die Wurzeln des Charakteristischen Polynoms zum VAR(1)-Modell aus Beispiel 22.3 sind.
3. Zeigen Sie, dass der Rang der Matrix $\boldsymbol{\Psi}(1)$ zum Modell aus Beispiel 22.3 den Wert Eins hat, wenn $\varrho_2 = 1$.
4. Zeigen Sie, dass die Gleichungen (22.2.5) für das VAR(1)-Modell aus Beispiel 22.3 die in Beispiel 22.4 angegebene Form haben.

22.B Hinweise zu gretl und EViews

22.B.1 Schätzen des VAR- und des VEC-Modells

Beide Software-Pakete bieten das Instrumentarium zur Datenanalyse auf Basis von VAR- und VEC-Modellen: Sie

- ermöglichen das einfache Spezifizieren der Modelle und
- die Anwendung der entsprechenden Schätzverfahren;
- sie stellen auch Verfahren wie Kointegrationstests zur Verfügung, die zum Diagnostizieren der jeweiligen Voraussetzungen verwendet werden.

22.B.2 VAR- und VEC-Modelle in gretl

gretl bietet Verfahren zum Spezifizieren und Schätzen von VAR- und VEC-Modellen; daneben gibt es Menüpunkte zur Wahl der Lag-Ordnung von VAR-Modellen und zu Kointegrationstests.

- Das Spezifizieren eines VAR-Modells erfolgt durch Anklicken von **Modell** im Hauptfenster, dann `Zeitreihen`, und der Auswahl von `Vektor-Autoregression ...` unter den dort gebotenen Möglichkeiten. Damit öffnet sich das Dialogfenster `VAR`, in dem die endogenen und die exogenen Variablen sowie die Lag-Ordnung spezifiziert werden, das ist die Zahl der Lags jeder endogenen Variablen, die in den Modellgleichungen zu berücksichtigen ist. Das Output-Fenster enthält ein Regressionsmodell für jede endogene Variable sowie das Ergebnis des Tests, ob die dem maximalen Lag entsprechenden Variablen zur Erklärung beitragen.
- Das Spezifizieren eines VEC-Modells erfolgt durch Anklicken von **Modell** im Hauptfenster, dann `Zeitreihen`, und der Auswahl von `VECM ...` unter den dort gebotenen Möglichkeiten. Damit öffnet sich das Dialogfenster `VECM`, in dem wie beim VAR-Modell die endogenen, die exogenen Variablen und die Lag-Ordnung spezifiziert werden und zusätzlich der Kointegrationsrang anzugeben ist, das ist Zahl der kointegrierenden Beziehungen zwischen den Modellvariablen. Schließlich sind durch entsprechende Anwahl die Interzepte und deterministische Trends festzulegen. Das Output-Fenster enthält ein Regressionsmodell für jede endogene Variable, den oder die kointegrierenden Vektoren und weitere Ergebnisse.
- Die Wahl der Lag-Ordnung von VAR-Modellen erfolgt durch Anklicken von **Modell** im Hauptfenster, dann `Zeitreihen` und Auswahl unter den dort gebotenen Möglichkeiten von `VAR Laglängenwahl ...`. Damit öffnet sich das Dialogfenster `VAR Laglängenwahl`, in dem wie beim VAR-Modell die endogenen und exogenen Variablen und die maximale Lag-Ordnung spezifiziert werden. Das Output-Fenster enthält zu jedem Lag von Eins bis zur Lag-Ordnung die Informationskriterien wie AIC und BIC.
- Die Kointegrationstests nach Engle-Granger und nach Johansen können als Menüpunkte unter `Zeitreihen` und dann `Kointegrationstest` aufgerufen werde. In beiden Fällen sind wiederum die endogenen und exogenen Variablen sowie die Lag-Ordnung anzugeben. Der Output zum Engle-Granger Test zeigt die Ergebnisse der drei Schritte dieses Tests. Der Output zum Johansen-Test zeigt die Teststatistiken zu Spur- und Max-Test, den oder die kointegrierenden Vektoren und weitere Inhalte.

22.B.3 VAR- und VEC-Modelle in EViews

EViews unterstützt das Schätzen der Parameter von VAR- und VEC-Modellen. Das Spezifizieren beider Modelle erfolgt durch Anklicken von `System` in `Objects/New Object` und Anwahl von `VAR`, wodurch ein Objekt vom Typ Var generiert und das entsprechende Eingabe-Fenster `VAR Specification` geöffnet wird. Hier sind die endogenen und exogenen Variablen sowie die gewünschten Lags anzugeben. Im Feld `VAR Type` wird festgelegt, ob ein VAR- oder ein VEC-Modell analysiert werden soll.

- Beim Schätzen eines VAR-Modells enthält das Output-Fenster für jede endogene Variable ein Regressionsmodell sowie diverse diagnostische Statistiken (AIC, BIC); für das gesamte Modell werden die Informationskriterien AIC und BIC gezeigt.
- Beim Schätzen eines VEC-Modells enthält das Output-Fenster zusätzlich zu den Informationen zum VAR-Modell die Ergebnisse zu der oder den kointegrierenden Beziehungen. Der Johansen-Test kann durch Anklicken von `View` und Anwahl von `Cointegration Test...` ausgeführt werden, wobei Interzepte und deterministischen Trends festzulegen sind; der Output zum Johansen-Test zeigt die Teststatistiken zu Spur- und Max-Test, die kointegrierenden Vektoren und weitere Inhalte.