



# Unfolding

## unimodale IRT Modelle

Kathrin Gruber, Marco Maier

Department of Statistics and Mathematics, WU Wien



## Allgemein

IRT Modelle nehmen an, dass...

- es eine latente Dimension, welche das Antwortverhalten auf ein Item beschreibt, gibt (**latent Trait**).
- Items und Personen auf einer gemeinsamen Skala repräsentiert werden können.

Die IC Kurve ist eine Funktion dieser latenten Dimension welche die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Antwort auf ein Item modelliert.



## Dominance OR Proximity Relations

### Dominance Relation:

Die Wahrscheinlichkeit eines positiven Response auf ein Item durch eine Person ist eine **steigende** Funktion der **Differenz** zwischen der Lokation der Person auf der latenten Dimension und des Items. (latente Dimension = Fähigkeit, Itemposition = Item Schwierigkeit)

→ **kumulatives** Modell

### Proximity Relation:

Die Wahrscheinlichkeit eines positiven Response auf ein Item durch eine Person ist eine **fallende** Funktion der **Distanz** zwischen der Lokation der Person und des Items.

→ Führt zu unimodalen IC Kurven = **Unfolding** Modell



## Unfolding (1)

### Hauptannahme:

Das Antwortverhalten einer Person auf ein Item ist eine Funktion der (absoluten) Differenz.

### Anwendungen:

Analyse von

- Einstellungen (z.B. in der Politik)
- Präferenzen
- Entwicklungsprozesse (z.B. Lernprozesse)



## Unfolding (2)

### Vorteil:

Präferenzen werden auf ein einzelnes gemeinsames Kontinuum *aufgefaltet* (unfolded) durch die Anwendung des Prinzips, dass Präferenzen zwischen Aussagen durch die **Distanzen** zwischen der Lokation von Item und Person, beschrieben werden.

### Nachteil:

Erlaubt keine *Zufälligkeiten* im Antwortverhalten; basiert auf deterministischen Regeln



## Unfolding (3)

Guttman Scale						Unfolding (Combs) Scale								
A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Scalogramm (I) Parallelogramm (II)

- Latente Dimension wird durch ein Set von Items (in unterschiedlichen Levels = **Item grid**) operationalisiert.
- Item Responses werden dabei vollständig durch die Position des Items und der Person auf der latenten Dimension determiniert.



## Probabilistische Unfolding Modelle

... berücksichtigen, dass die Distanzen zwischen Personen- und Itempositionen auch einen **zufälligen** Anteil besitzen.

- Signed OPLM (Klinkenberg)
- PARELLA model (Hoijtink)
- Hyperbolic cosine IRT model (HCM) (Andrich & Luo)
- Graded unfolding model (GUM)(Andrich & Luo)



## I The signed OPLM (1)

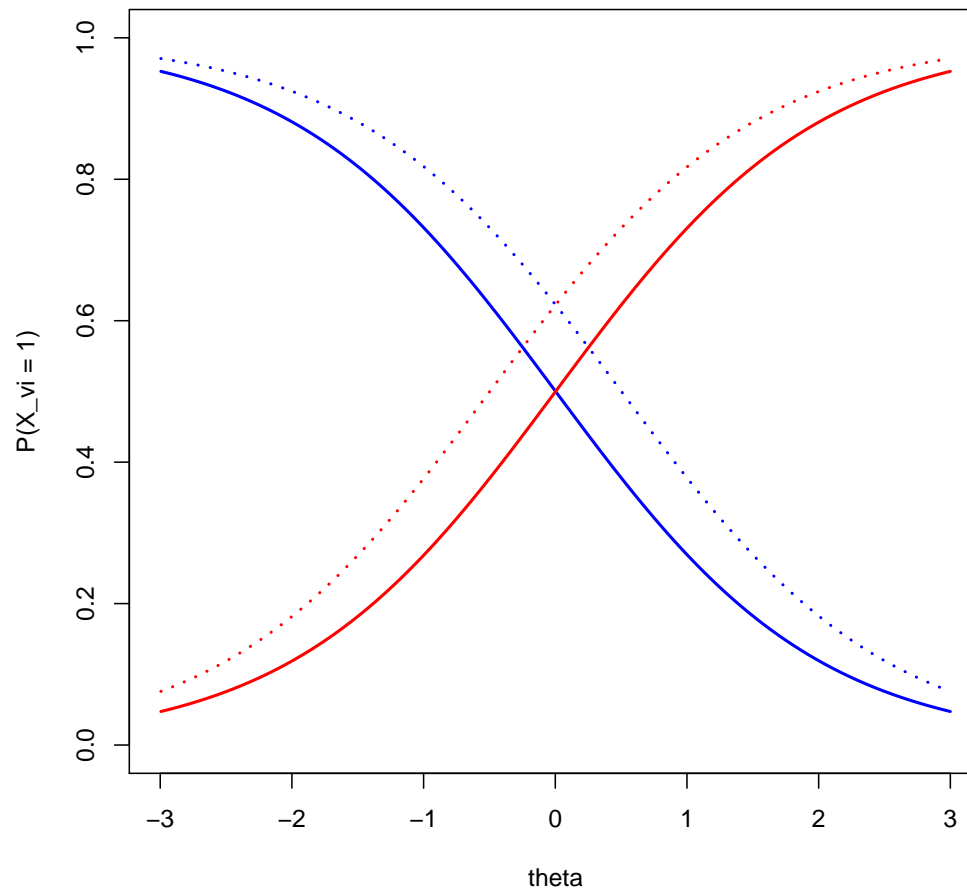
$$P(X_{vi}|\theta_v, \beta_i, \alpha_i) = \frac{\exp(\alpha_i(\theta_v - \beta_i))}{1 + \exp(\alpha_i(\theta_v - \beta_i))}$$

$\alpha_i$  = positiver od. negativer Anstieg (beschreibt ansteigende oder abfallende Wahrscheinlichkeit der *Zustimmung*).





## I The signed OPLM (2)





## I The signed OPLM (3)

→ *Umdrehen* der Items und damit der IC Kurven von abfallend zu ansteigend.

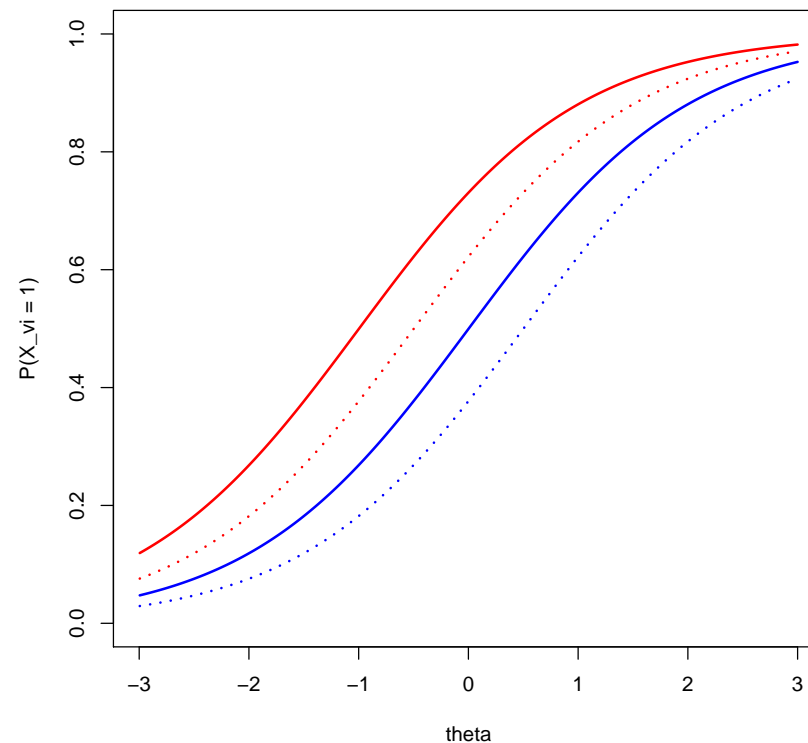
Person	Items				
	1	2	3	4	
1	1	1	0	0	positiv
2	0	1	0	0	
3	0	0	0	0	neutral
4	0	0	1	0	
5	0	0	1	0	negativ
<hr/>					
negativ					
<hr/>					
0 0 0 0					
1 0 0 0					
1 1 0 0					
1 1 1 0					
1 1 1 0					



## I The signed OPLM (4)

→ Scalogramm Struktur

→ Aber: die Transformation beeinflusst die Itemposition nicht, da man  $P(X_{vi} = 0 | \theta_v, \beta_i, \alpha_i)$  modelliert.





## I The signed OPLM (5)

signed OPLM  $\Leftrightarrow$  OPLM (Verwendung von OPLM Software und CML Schätzung)

**Restriktion:**  $\alpha_i$  müssen bekannt sein

**Problem:** negativ auf ein positiv formuliertes Item zu antworten impliziert nicht auch auf das entsprechende negativ formulierte Item positiv zu antworten (und umgekehrt).



## II The PARELLA Model (1)

$$X_{vi} = 1 \quad \text{falls} \quad |\theta_v - \beta_i| > \tau$$

$$X_{vi} = 0 \quad \text{falls} \quad |\theta_v - \beta_i| < \tau$$

$\tau$  ist der maximale Abstand zwischen  $\theta$  und  $\beta$  in welchem eine Person noch eine positive Antwort gibt.

$$|\theta_v - \beta_i| < 1 \quad \rightarrow \quad X_{vi} = 1$$

$$|\theta_v - \beta_i| > 1 \quad \rightarrow \quad X_{vi} = 0$$



## II The PARELLA Model (2)

$$P(X_{vi} = 1 | \theta_v, \beta_i, \gamma) = \frac{1}{1 + |\theta_v - \beta_i|^{2\gamma}}$$

$\gamma$  Mass der relativen Wichtigkeit von zufälligen und strukturellen Komponenten. Je grösser  $\gamma$  desto sensitiver ist das Modell bzgl. der Distanz zw. Person und Item

**Hinweis:** Hier gibt es nur einen *overall*  $\gamma$ -Parameter für alle Items (nicht wie beim OPLM,  $\alpha$  für jedes Item)

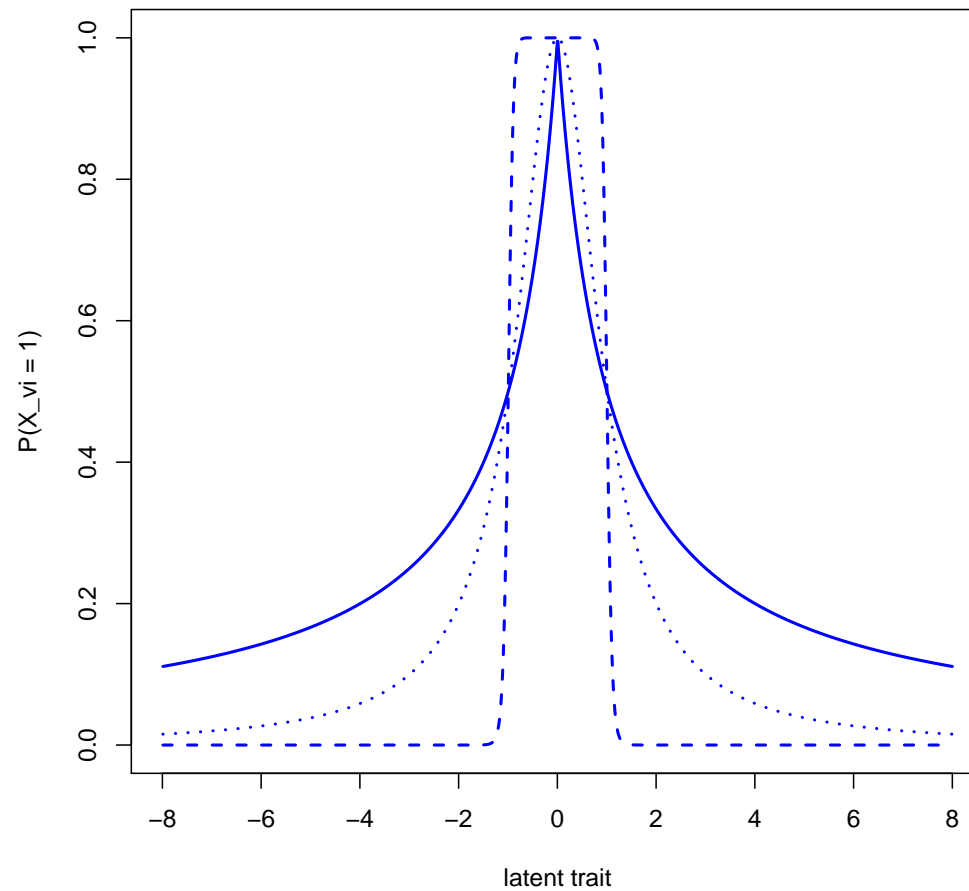


## II The PARELLA Model (3)

- $\gamma$  beeinflusst den Anstieg der unimodalen IC Kurve (je grösser desto steiler)
- $\gamma = 0$  Item Responses sind vollständig zufällig und werden nicht durch das Distanzmass bestimmt (andere Variablen wie z.B. Subjektcovariaten werden benötigt).
- $\gamma \geq 10$  Wahl determiniert durch die Distanz zwischen Item- und Personenlokation (entspricht Combs' deterministischem Parallelogramm Model).



## II The PARELLA Model (4)







## II The PARELLA Model (5)

**Eindimensional:** Da beide, Personen und Items, auf der selben Skala oder Dimension abgebildet werden.

**Unimodale IC Kurven:** Abfallende und ansteigende Kurvenverläufe zwischen Personen- und Itemposition (Proximity Relation ist der bestimmende Faktor im Modell).

**Stichprobenunabhängigkeit:** Bedingt auf die Position der Person sind die Item Responses unabhängig.

**Lokale stochastische Unabhängigkeit:** im Modell keine Interaktionen zwischen fixen und zufälligen Effekten, daher

- Korrekte Beschreibung des Responseprozess = Itempositionen sind die selben für jede Person
- Personenlokationen sind die selben für jedes Personensubset



## II The PARELLA Model (6)

Schätzung mittels Expected Conditional Maximum-Likelihood  
(ECM) Algorithmus (= EM)  
Personenlokationen mittels EAP



## Ex.: The traffic data questionnaire

Item		Polarity
1	People who keep driving a car are not concerned with the future of our environment	-
2	The environmental problem justifies a tax burden on car driving so high that people quit using a car	-
3	Putting a somewhat higher tax burden on car driving is a step in the direction of a healthier environment	-
4	Car users should have to pay taxes per mile driven	-
5	A cleaner environment demands sacrifices such as decreasing car usage	-
6	It is better to deal with other forms of environmental pollution than car driving	+
7	Considering the environmental problems, everybody should decide for themselves how often to use the car	+
8	Technically adapted cars do not constitute an environmental treat.	+
9	Instead of environmental protection measures with respect to car use, the road system should be extended.	+
10	Car use cannot be abandoned. Some pressure on the environment has to be accepted.	+



## The hyperbolic cosine model (1)

### Hauptannahme:

Personenresponses auf ein Statement folgen einem kummulativen Item Response Model.

Ablehnung wird in zwei latente Komponenten unterteilt:

**Disagree below (DB):** Person befindet sich **unter** dem Statement

**Disagree above (DA):** Person befindet sich **über** dem Statement

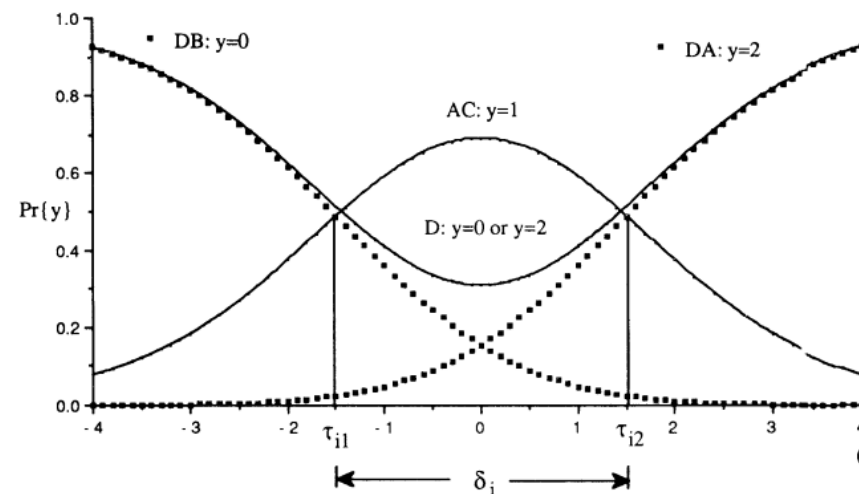
**Agree close (AC):** Person befindet sich **nahe** dem Statement



## The hyperbolic cosine model (2)

Die beiden *Disagree*-Komponenten besitzen einen **monotonen** sowie abfallend/ansteigenden Verlauf ( $\rightarrow$  drei graded Responses)

Die Kategorien-Response Funktionen für ein Statement mit drei geordneten Kategorien (und zwei Thresholds):





## The hyperbolic cosine model (3)

$$P(X_{vi} = 1 | \theta_v, \beta_i, \gamma_i) = \frac{\exp(\gamma_i + (\theta_v - \beta_i))}{1 + \exp((\gamma_i + \theta_v - \beta_j)) + \exp 2(\theta_v - \beta_i)}$$

Wahrscheinlichkeit, dass Person  $v$  auf Item  $i$  mit *Agree* antwortet

$$P(X_{vi} = 1 | \theta_v, \beta_i, \gamma_i) = \frac{\exp(\gamma_i)}{\exp(\gamma_i) + 2\cosh(\theta_v - \beta_i)}$$

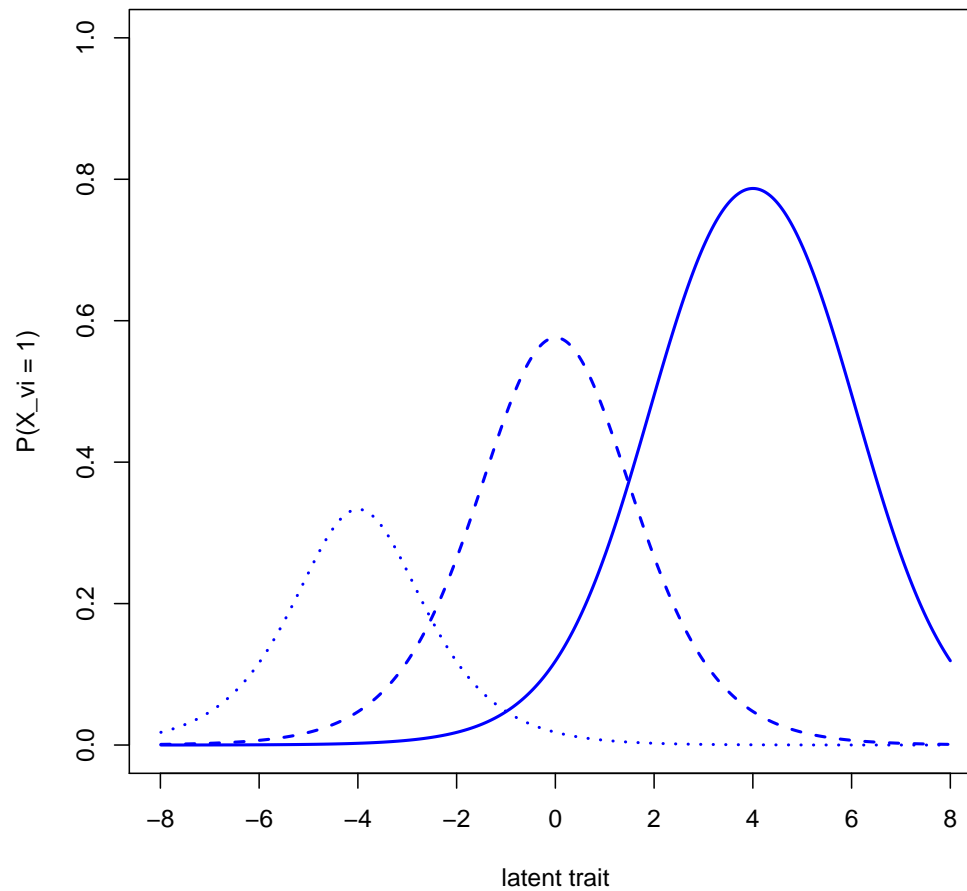
und umgekehrt

$$P(X_{vi} = 0 | \theta_v, \beta_i, \gamma_i) = \frac{2\cosh(\theta_v - \beta_i)}{\exp(\gamma_i) + 2\cosh(\theta_v - \beta_i)}$$

$\gamma_i$  = Unit parameter ( $\gamma_i \geq 0$ , interpretierbar als Anstieg/Diskrimination),  $\beta_i$  = Lokationsparameter



## The hyperbolic cosine model (4)





## Ex.: Capital Punishment

Item		Polarity
1	Capital punishment is one of the most hideous practices of our time	-
2	Capital punishment is not an effective deterrent to crime	-
3	The state cannot teach the sacredness of human life by destroying it	-
4	I don't believe in capital punishment but I am not sure it isn't necessary	0
5	I think capital punishment is necessary but I wish it were not.	+
6	Until we find a more civilized way to prevent crime, we must have capital punishment.	+
7	Capital punishment is justified because it does not act as a deterrent to crime.	+
8	Capital punishment gives the criminal what he deserves.	+





## The hyperbolic cosine model for pairwise preferences (1)

Bei Paarvergleichen wählt die Person zwischen zwei Statements jenes welches ihre eigene Position am besten reflektiert.

Choice (i,j)	Responses
(0,0)	Disagree to both statements
(1,1)	Agree to both statements
<b>(1,0)</b>	Agree to first, disagree to second
<b>(0,1)</b>	Disagree to first, agree to second



## The hyperbolic cosine model for pairwise preferences (2)

$$P_{nij} = \frac{P(1, 0)}{P(1, 0) \text{ or } (0, 1)}$$

$$P_{vij} = \frac{\exp(\gamma_i) \cosh(\theta_v - \beta_j)}{\exp(\gamma_i) \cosh(\theta_v - \beta_j) + \exp(\gamma_j) \cosh(\theta_v - \beta_i)}$$

$\gamma_i$  wird als ident über alle Statements angenommen

$$P_{vij} = \frac{\cosh(\theta_v - \beta_j)}{\cosh(\theta_v - \beta_j) + \cosh(\theta_v - \beta_i)}$$



## The Generalized Graded Unfolding Model (GGUM)

### 4 ‚Prämissen‘ des GGUM (Roberts et. al)

- Personen  $v$  ( $\theta_v$ ), die einem Item  $i$  ( $\delta_i$ ) zustimmen befinden sich am latenten Kontinuum näher bei diesem Item
- Je nach Vorzeichen von  $\theta_v - \delta_i$  spricht man von ‚Zustimmung (bzw. Ablehnung) von oben/unten‘
- Roberts et. al gründen ihr GGUM auf das GPCM (Muraki, 1992)
- Thresholds ( $\tau_{ij}$ ) bei ordinalen Items verteilen sich symmetrisch um  $\theta_v - \delta_i$

Da das GGUM auf dem GPCM basiert gibt es hier abgesehen von (Schwellen-)Schwierigkeiten auch noch Diskriminationsparameter pro Kategorie.



Formal ist das GGUM eher unhandlich:

$$\frac{\exp\{\alpha_i[x(\theta_v - \delta_i) - \sum_{j=0}^x \tau_{ij}]\} + \exp\{\alpha_i[(M - x)(\theta_v - \delta_i) - \sum_{j=0}^x \tau_{ij}]\}}{\sum_{w=0}^C \exp\{\alpha_i[w(\theta_v - \delta_i) - \sum_{j=0}^w \tau_{ij}]\} + \exp\{\alpha_i[(M - w)(\theta_v - \delta_i) - \sum_{j=0}^w \tau_{ij}]\}}$$

$x$  ist die manifeste Antwort (0 = stärkste Ablehnung, . . . ,  $C$ )

$C = \#Kategorien - 1$

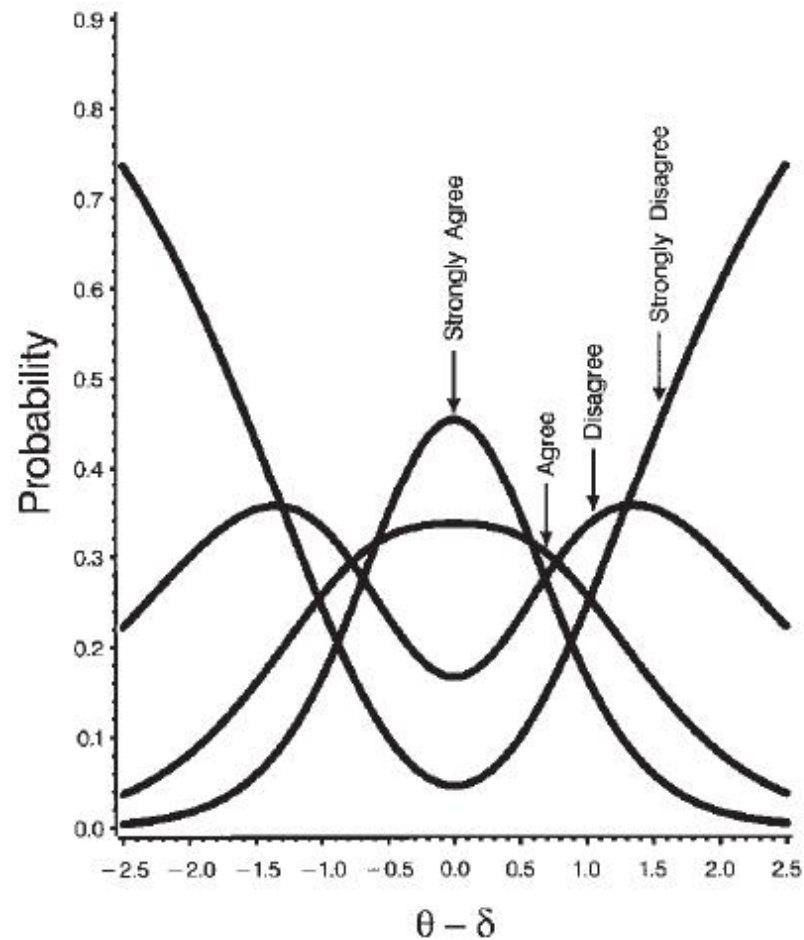
$M = 2C + 1$

$\tau_{ij}$  sind die Thresholds

$\alpha_i$  sind die Trennschärfen



Ein Beispiel mit 4 Kategorien wäre:





Implementiert ist das Modell in der frei verfügbaren Software GGUM (aktuelle Version GGUM2004 1.1)

<http://www.psychology.gatech.edu/unfolding/FreeSoftware.html>

Die Parameterschätzung funktioniert mittels MML; Personenparameter können per EAP (Expected A Posteriori) nachträglich geschätzt werden.

Wie man aus dem GPCM durch Parameterrestriktionen andere IRT-Modelle ableiten kann ist dies auch beim GGUM möglich (die Software bietet 8 Modelle an).



## Eine Auswahl der Modelle

### Modell 3: Rating Scale Version

Dies ist das GUM, bei dem alle  $\alpha_i = 1$  und  $\tau_{ij}$  für alle Items gleich sind.

### Modell 4: Partial Credit Version

Hier sind alle Diskriminationen auf 1 restringiert.

### Modell 7: Generalized RSM Version

Die Thresholds für alle Items sind gleich.

### Modell 8: Generalized PCM Version

Das ‚eigentliche‘ GGUM – alle Parameter sind frei.



## Kommerzielle Software

Außer GGUM gibt es zur Schätzung von Unfolding-Modellen noch die Pakete

- MUDFOLD – Multiple Unidimensional Unfolding
- RUMMFOLD – Rasch Unidimensional Models for Measurement for Unfolding Response Models





D. Andrich. A Hyperbolic Cosine IRT Model for Unfolding Direct Responses of Persons to Items. *In A. Boomsma, M. van Duijn and T. Snijeders (Hrsg), Essays on Item Response Theorie (S. 399–414).*

H. Hoijtink. *PARELLA: An IRT Model for Parallelogram Analysis.* In A. Boomsma, M. van Duijn and T. Snijeders (Hrsg), *Essays on Item Response Theorie (S. 416–429).*

E. Klinkenberg. A Logistic IRT Model for Decreasing and Increasing Item Characteristic Curves. *In A. Boomsma, M. van Duijn and T. Snijeders (Hrsg), Essays on Item Response Theorie (S. 173–192).*

R. Mokken, W. Van Schuur and A. Leeferink. *The Circles of Our Minds: A Nonparametric IRT Model for the Circumplex.* In A. Boomsma, M. van Duijn and T. Snijeders (Hrsg), *Essays on Item Response Theorie (S. 339–356).*

W. Post, M. Van Duijn and B. Van Baarsen. Single-Peaked or Monotone Tracelines? On the Choice of an IRT Model for Scaling Data. *In A. Boomsma, M. van Duijn and T. Snijeders (Hrsg), Essays on Item Response Theorie (S. 391–414).*



G. Luo. A Class of Probabilistic Unfolding Models for Polytomous Responses. *Journal of Mathematical Psychology*, 45:224–248, 2001.

J. Roberts and J. Laughlin. A Unidimensional Item Response Model for Unfolding Responses From a Graded Disagree-Agree Response Scale. *Applied Psychological Measurement*, 20(3):231–255, 1996.

D. Andrich. Hyperbolic Cosine Latent Trait Models for Unfolding Direct Responses and Pairwise Preferences. *Applied Psychological Measurement*, 19(3):269–290, 1995.

D. Andrich and G. Luo. A Hyperbolic Cosine Latent Trait Model for Unfolding Dichotomous Single-Stimulus Responses. *Applied Psychological Measurement*, 19(3):269–290, 1995.