

2.8 Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle

Seien $Y_{1,t}$ und $Y_{2,t}$ zwei instationäre Zeitreihen mit unit root. Die beiden Zeitreihen heißen kointegriert, wenn eine Linearkombination der beiden Prozesse stationär ist:

$$\beta_1 Y_{1,t} + \beta_2 Y_{2,t} + \beta_3 = u_t$$

wobei u_t ein kovarianzstationärer Prozess ist mit $E(u_t) = 0$.

Die Kointegrationsbeziehung hat eine für die Vorhersage interessante Interpretation: egal welcher „gap“ u_t zu einem bestimmten Zeitpunkt beobachtet wurde, wird sich der „gap“ langfristig schließen, da u_t ein stationärer Prozess mit Niveau 0 ist:

Kointegration

$$\beta_1 Y_{1,t+l} + \beta_2 Y_{2,t+l} + \beta_3 = u_{t+l} \rightarrow 0$$

- Wäre u_t ein instationärer Prozess, so hätte er nicht die Eigenschaft, zu 0 zurückzukehren, und die Level der beiden Prozesse könnten auseinanderdriften.
- Kointegration bedeutet, daß die künftigen Level der Prozesse nicht auseinander driften können, sondern durch die Kointegrationsbeziehung gezwungen sind, gemeinsam zu laufen (sie sind durch eine unsichtbare Leine aneinander gebunden). Aktuelle Abweichungen von der Kointegrationsbeziehung sind temporär.

Kointegration

Der Vektor $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ wird als Kointegrationsvektor bezeichnet. Er ist nicht eindeutig, da der Vektor $(\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \lambda\beta_3)$ ebenfalls ein Kointegrationsvektor ist. Insbesondere gilt für $\lambda = 1/\beta_1$:

$$Y_{1,t} = \beta_2^* Y_{2,t} + \beta_3^* + u_t^*,$$

bzw. für $\lambda = 1/\beta_2$:

$$Y_{2,t} = \beta_1^* Y_{1,t} + \beta_3^* + u_t^*.$$

Das bedeutet, daß kointegrierte Zeitreihen formal durch ein bivariates Regressionsmodell mit stationärem (im Normalfall autokorreliertem) Fehler beschreibbar sind, obwohl Response- und Prädiktorvariablen instationäre Zeitreihen sind.

Vorhersage kointegrierter Zeitreihen

Verwendet man zur Vorhersage bivariater, instationärer Zeitreihen ein (stationäres) VAR(p)-Modell für die absoluten oder relativen Zuwachsraten, dann ergeben sich bei der Vorhersage der ursprünglichen Prozesse $Y_{1,t}$ und $Y_{2,t}$ die Vorhersageformeln (4) und (5), bei denen die Level der jeweiligen Prozesse unabhängig voneinander vorhergesagt werden.

Wenn die beteiligten Zeitreihen kointegriert sind, dann erfüllen die Level die Kointegrationsbeziehung

$$Y_{1,t} = \beta_2^* Y_{2,t} + \beta_3^* + u_t^*,$$

Vorhersage kointegrierter Zeitreihen

und es stellt sich die Frage, ob man die Vorhersage der Level nicht durch Einbeziehung der Kointegrationsbeziehung verbessern kann. Fehlerkorrekturmodelle (Error Correction Models) versuchen eine derartige Verbesserung zu erzielen, indem der aktuelle gap u_t^* ,

$$u_t^* = Y_{1,t} - \beta_2^* Y_{2,t} - \beta_3^*$$

als Prädiktor ins Modell aufgenommen wird.

Der gap u_t^* mißt die akute Abweichung der Level der beiden Prozesse von der langfristigen Kointegrationsbeziehung.

Vorhersage kointegrierter Zeitreihen

Bei $\beta_2^* > 0$ gilt beispielsweise:

- Ist der gap u_t^* positiv, so ist entweder $Y_{1,t}$ größer oder $Y_{2,t}$ kleiner als erwartet. Da sich der gap langfristig schließen wird, kann die aktuelle Information für die Vorhersage genutzt werden: $Y_{1,t}$ wird tendenziell fallen ($r_{1,t+1} = Y_{1,t+1} - Y_{1,t} < 0$) und $Y_{2,t}$ wird tendenziell steigen ($r_{2,t+1} = Y_{2,t+1} - Y_{2,t} > 0$).
- Ist der gap u_t^* negativ, so ist entweder $Y_{1,t}$ kleiner oder $Y_{2,t}$ größer als erwartet. $Y_{1,t}$ wird tendenziell steigen ($r_{1,t+1} = Y_{1,t+1} - Y_{1,t} > 0$) und $Y_{2,t}$ wird tendenziell fallen ($r_{2,t+1} = Y_{2,t+1} - Y_{2,t} < 0$), damit sich der gap schließen kann.

Fehlerkorrekturmodelle

Die Veränderungsrate der Prozesse hängt somit mit dem Vorzeichen des gaps zusammen. Das einfachste, bivariate Fehlerkorrekturmodell hat die Form:

$$\begin{aligned} r_{1,t} &= \alpha_1 \cdot u_{t-1}^* + u_{1,t}, \\ r_{2,t} &= \alpha_2 \cdot u_{t-1}^* + u_{2,t}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei die verbleibenden Fehler $u_{1,t}$ und $u_{2,t}$ nicht autokorreliert und nicht kreuzkorreliert sind – außer zum lag 0:

$$\begin{bmatrix} (u_{1,t} \quad u_{2,t})' \end{bmatrix} \sim \text{Normal}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}).$$

Fehlerkorrekturmodelle

Es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen dem bivariaten Fehlerkorrekturmodell und dem bivariaten VAR(1)-Modell (7).

Das Fehlerkorrekturmodell kann folgendermaßen in Vektorform geschrieben werden:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{c} + \mathbf{u}_t, \quad (9)$$

wobei $\mathbf{A}$ und $\mathbf{c}$ mit folgender Matrix bzw. folgendem Vektor identisch sind:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \cdot \beta_2^* \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \cdot \beta_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \cdot \beta_3^* \\ -\alpha_2 \cdot \beta_3^* \end{bmatrix}.$$

Fehlerkorrekturmodelle

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat eine interessante Eigenschaft: dividiert man die zweite Zeile durch α_2 und multipliziert man sie anschließend mit α_1 , so erhält man die erste Zeile: die Zeilen sind linear abhängig, der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ (d.h. die Zahl der linear unabhängigen Zeilen) ist gleich 1.

Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ enthält somit Information darüber, ob die beiden Reihen kointegriert sind oder nicht. Das ist genau dann der Fall, wenn genau 1 Eigenwert von $\mathbf{A}$ gleich 0 ist. Dieses Ergebnis ist die Basis des Kointegrationstest von Johansen.

Vorhersage

Die Ein-Schritt-Vorhersage der Level lautet:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{1,t+1} &= Y_{1,t} + \hat{r}_{1,t+1}, \\ \hat{Y}_{2,t+1} &= Y_{2,t} + \hat{r}_{2,t+1},\end{aligned}\tag{10}$$

wobei $\hat{r}_{1,t+1}$ und $\hat{r}_{2,t+1}$ aus dem Fehlerkorrekturmodell vorhergesagt werden. Da die Residuen nicht autokorreliert sind, ist die beste Vorhersage von $u_{1,t+1}$ und $u_{2,t+1}$ der Wert 0:

$$\begin{aligned}\hat{r}_{1,t+1} &= \hat{\alpha}_1 \cdot (Y_{1,t} - \hat{\beta}_2^* Y_{2,t}) + \hat{c}_1, \\ \hat{r}_{2,t+1} &= \hat{\alpha}_2 \cdot (Y_{1,t} - \hat{\beta}_2^* Y_{2,t}) + \hat{c}_2.\end{aligned}$$

Vorhersage

Durch Umformen der Gleichung (10) erhält man folgende Vorhersageformel:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{1,t+1} &= (\hat{\alpha}_1 + 1)Y_{1,t} - \hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2^*Y_{2,t} + \hat{c}_1, \\ \hat{Y}_{2,t+1} &= \hat{\alpha}_2Y_{1,t} + (1 - \hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2^*)Y_{2,t} + \hat{c}_2,\end{aligned}$$

die deutlich zeigt, dass im Unterschied zum VAR-Modell in den Differenzen in die Vorhersage künftiger Levels Information über die aktuellen Levels beider Prozesse eingeht.

Vorhersage

Für die Mehr-Schritt-Vorhersage gilt in ähnlicher Weise:

$$\hat{Y}_{1,t+l} = \hat{Y}_{1,t+l-1} + \hat{r}_{1,t+l},$$

$$\hat{Y}_{2,t+l} = \hat{Y}_{2,t+l-1} + \hat{r}_{2,t+l},$$

wobei $\hat{r}_{1,t+l}$ und $\hat{r}_{2,t+l}$ aus dem Fehlerkorrekturmodell vorhergesagt werden:

$$\hat{r}_{1,t+l} = \hat{\alpha}_1 \cdot (\hat{Y}_{1,t+l-1} - \hat{\beta}_2^* \hat{Y}_{2,t+l-1}) + \hat{c}_1,$$

$$\hat{r}_{2,t+l} = \hat{\alpha}_2 \cdot (\hat{Y}_{1,t+l-1} - \hat{\beta}_2^* \hat{Y}_{2,t+l-1}) + \hat{c}_2.$$

Schätzen des Fehlerkorrekturmodells

Sind die Reihen kointegriert, so kann die Matrix $\mathbf{A}$ im Fehlerkorrekturmodell

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{c} + \mathbf{u}_t,$$

nicht beliebig gewählt werden, da die Reihen von $\mathbf{A}$ linear abhängig sind. Das Fehlerkorrekturmodell ist nichtlinear in den unbekannten Parametern:

$$r_{1,t} = \alpha_1 \cdot (Y_{1,t-1} - \beta_2^* Y_{2,t-1}) + c_1 + u_{1,t},$$

$$r_{2,t} = \alpha_2 \cdot (Y_{1,t-1} - \beta_2^* Y_{2,t-1}) + c_2 + u_{2,t}.$$

Schätzen des Fehlerkorrekturmodells

- Da eine direkte OLS-Schätzung nicht mehr möglich ist, wird das Maximum-Likelihood-Verfahren angewendet.
- Die Residuen aus dem Fehlerkorrekturmodell sollen unkorreliert sein und keine Kreuzkorrelation, außer zum lag 0 besitzen.
- Ist diese Annahme verletzt, so muß das einfache Fehlerkorrekturmodell um zeitverzögerte lags der Zuwachsprozesse erweitert werden.

Erweitern der lag Struktur

Es werden in das Fehlerkorrekturmodell neben dem gap so wie beim klassischen VAR-Modell zeitverzögerte Zuwächse als Prädiktor ins Modell aufgenommen. Ein Fehlerkorrekturmodell mit lag 1 lautet:

$$r_{1,t} = \alpha_1 \cdot u_{t-1}^* + \varphi_{11}^* r_{1,t-1} + \varphi_{12}^* r_{2,t-1} + c_1 + u_{1,t}, \quad (11)$$

$$r_{2,t} = \alpha_2 \cdot u_{t-1}^* + \varphi_{21}^* r_{1,t-1} + \varphi_{22}^* r_{2,t-1} + c_2 + u_{2,t},$$

wobei die verbleibenden Fehler $u_{1,t}$ und $u_{2,t}$ – außer zum lag 0 – nicht autokorreliert und nicht kreuzkorreliert sind.

Erweitern der lag Struktur

Modell (11) besitzt die Gestalt eines VAR(1)-Modell in den Zuwächsen, das um den gap einer Kointegrationsbeziehung erweitert wurde. Sind instationäre Zeitreihen kointegriert, so würde eine reine VAR-Modellierung in den Zuwächsen einen Spezifikationsfehler enthalten.

Die Matrizenschreibweise des Modells lautet:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}^* \mathbf{r}_{t-1} + \mathbf{c} + \mathbf{u}_t,$$

mit

$$\mathbf{\Phi}^* = \begin{bmatrix} \varphi_{11}^* & \varphi_{12}^* \\ \varphi_{21}^* & \varphi_{22}^* \end{bmatrix}.$$

Erweitern der lag Struktur

Weisen die Residuen bei der Modelldiagnose noch immer Autokorrelation auf, so kann das Modell – ähnlich wie beim VAR-Modell – um höhere lags erweitert werden:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + (\boldsymbol{\Phi}^*)^{[1]}\mathbf{r}_{t-1} + \dots + (\boldsymbol{\Phi}^*)^{[p]}\mathbf{r}_{t-1} + \mathbf{c} + \mathbf{u}_t \quad (12)$$

Die Einbeziehung der lag-Struktur tangiert in keinsten Weise den interessanten Zusammenhang zwischen dem Rang der Matrix $\mathbf{A}$ und den fundamentalen Eigenschaften der beteiligten Zeitreihen.

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

- Estimate standard error correction model for $d\log(ip-fra)$ and $d\log(ip-esp)$ $\Rightarrow$ Residuals are autocorrelated
- Estimate standard error correction model for $d\log(ip-fra)$ and $d\log(ip-esp)$ with lag 1 and lag 2 differences