Darstellung eines VAR(p)-Prozesses als VAR(1)-Prozess

Definiere

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_t \\ \mathbf{Y}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{t-p+1} \end{pmatrix}$$

Darstellung eines VAR(p)-Prozesses als VAR(1)-Prozess

Dann gilt:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \ldots & \boldsymbol{\Phi}_{p-1} & \boldsymbol{\Phi}_p \\ I_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p & I_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p & \cdots & I_p & \mathbf{0}_p \end{pmatrix},$$

Beispiele

VAR(2)-Prozess

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{\Phi}_2 \\ I_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix},$$

VAR(3)-Prozess

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{\Phi}_2 & \mathbf{\Phi}_3 \\ I_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & I_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}.$$

Stationaritätsbedingung

$\mathbf{F}$ ist eine pm Matrix

Alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{F}$ sind betragsmäßig kleiner als 1.

Dann gilt:

- Sind die Fehler normalverteilt, so ist der VAR(1)- Prozess streng stationär
- Sind die Fehler nicht normalverteilt, aber gilt $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_t) = \mathbf{0}$ und $\mathrm{Var}\left(\boldsymbol{u}_t\right) = \boldsymbol{\Sigma}$, so ist der VAR(1)- Prozess schwach stationär

Bestimmen des Erwartungswertes

Erwartungswert $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}(\mathbf{Y}_t)$ eines stationären Prozesses, erfüllt folgendes Gleichungssystem:

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\Phi}_1 \mathrm{E}(\mathbf{Y}_{t-1}) + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathrm{E}(\mathbf{Y}_{t-p}) + \mathbf{c} + \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_t).$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\mu} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{\mu} + \mathbf{c}, \\
\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\mu} - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{c}, \\
(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p) \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{c}, \\
\boldsymbol{\mu} &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p)^{-1} \mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Bestimmen des Erwartungswertes

Bei einem stationären VAR(p)-Modell hat die Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 - \ldots - \mathbf{\Phi}_p$$

vollen Rang und ist daher invertierbar. In diesem Fall sind alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von 0 verschieden.

2.5 Schätzung in EViews

Darstellung eines VAR(1)-Modells als Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} &= \Phi_{11} Y_{1,t-1} + \Phi_{12} Y_{2,t-1} + \cdots + \Phi_{1m} Y_{m,t-1} + c_1 + u_{1t}, \\
Y_{2t} &= \Phi_{21} Y_{1,t-1} + \Phi_{22} Y_{2,t-1} + \cdots + \Phi_{2m} Y_{m,t-1} + c_2 + u_{2t}, \\
&\vdots \\
Y_{mt} &= \Phi_{m1} Y_{1,t-1} + \Phi_{m2} Y_{2,t-1} + \cdots + \Phi_{mm} Y_{m,t-1} + c_m + u_{mt}.
\end{aligned}
$$

Schätzung in EViews

- Das sind m Regressionsmodelle mit identischen Prädiktoren.
- $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1m}$ (1. Zeile von $\mathbf{\Phi}$) und c_1 kommen nur im ersten Regressionsmodell vor.
- $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \ldots, \Phi_{jm}$ (j.te Zeile von $\mathbf{\Phi}$) und c_j kommen nur im j.ten Regressionsmodell vor.
- Getrennte OLS-Schätzung aus den einzelnen Zeilen zulässig, da die Prädiktoren identisch sind.

Schätzung eines VAR(p)-Modells in EViews

- Darstellung eines VAR(p)-Modells als Gleichungssystem möglich.
- Das sind m Regressionsmodelle mit identischen Prädiktoren.
- Jeweils die j.te Zeile von $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$,. . . , $\mathbf{\Phi}_p$ sowie c_j kommen nur im j.ten Regressionsmodell vor.
- Getrennte OLS-Schätzung aus den einzelnen Zeilen zulässig, da die Prädiktoren identisch sind.

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

Industrial production - quarterly data for various European countries from 1970:1 to 2001:4; consider France (`ip-fra`), Germany (`ip-deu`), and Spain (`ip-esp`) - estimate various trivariate VAR(p)-models for relative growth rate (`r-fra` , `r-deu`, `r-esp`)

- Estimate VAR(1) model

- Estimate VAR(p) model with increasing p

- Discuss where to find the coefficients

- Discuss stationarity of estimated model

Auswerten der OLS-Residuen

Für jedes der m Regressionsmodelle gibt es OLS-Residuen, z.B. VAR(1)-Modell:

$$\hat{u}_{jt} = Y_{jt} - \hat{\Phi}_{j1} Y_{1,t-1} - \hat{\Phi}_{j2} Y_{2,t-1} - \cdots - \hat{\Phi}_{jm} Y_{m,t-1} - \hat{c}_j, \quad t = 2, 3$$

Diese OLS-Residuen sind nützlich zur:

- Schätzung von $\mathbf{\Sigma}$ durch empirische Kovarianzmatrix der Residuen:

$$\hat{\Sigma}_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{t=2}^{N} \hat{u}_{jt} \hat{u}_{kt}.$$

- Residuendiagnose

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

Industrial production - quarterly data for various European countries from 1970:1 to 2001:4; consider France (`ip-fra`), Germany (`ip-deu`), and Spain (`ip-esp`) - estimate various trivariate VAR(p)-models for relative growth rate (`r-fra, r-deu, r-esp`)

- Discuss residual diagnostics (in particular remaining auto- and crosscorrelation)
- Discuss choosing the model order using AIC and SC

Impuls response function

A stationary VAR(1)-process $\mathbf{Y}_t$ has a representation as a weighted sum of past "shocks" $\boldsymbol{u}_t$, $\boldsymbol{u}_{t-1}$, $\boldsymbol{u}_{t-2}, \ldots$:

$$\mathbf{Y}_{t-2} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Y}_{t-3} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{u}_{t-2},$$

$$\mathbf{Y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Y}_{t-2} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{u}_{t-1},$$

$$\mathbf{Y}_{t} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2(\mathbf{Y}_{t-2} - \boldsymbol{\mu}) =$$

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{u}_{t-2} + \boldsymbol{\Phi}^3(\mathbf{Y}_{t-3} - \boldsymbol{\mu}) = \ldots .$$

Therefore:

$$\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{u}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}^s\boldsymbol{u}_{t-s} + \ldots .$$

Impuls response function

- Due to stationarity: $\mathbf{\Phi}^s \to 0$ (all eigenvalues smaller than 1), hence the influence of "old " shocks decreases

- Extension to VAR(p)-Models:

$$\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{u}_t + \mathbf{\Psi}^{[1]}\boldsymbol{u}_{t-1} + \mathbf{\Psi}^{[2]}\boldsymbol{u}_{t-2} + \ldots + \mathbf{\Psi}^{[s]}\boldsymbol{u}_{t-s} + \ldots,$$

  where $\mathbf{\Psi}^{[s]}$ is a mxm matrix depending on $\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_p$ (e.g. $\mathbf{\Psi}^{[s]} = \mathbf{\Phi}^s$ for a VAR(1) model).

- $\mathbf{\Psi}^{[s]}$ describes how a shock at time t influences future deviations of $\mathbf{Y}_{t+s}$ from $\boldsymbol{\mu}$ (this response to a shock is independent of t)

Impulse response function

Interpretation of the coefficients of $\mathbf{\Psi}^{[s]}$:

- The element $\mathbf{\Psi}_{ij}^{[s]}$ measures how a shock in the jth time series Y_{jt} of order 1 effects deviations of the ith time series $Y_{i,t+s}$ from the long rum mean after s periods.

- Impulse response function: plotting $\mathbf{\Psi}_{ij}^{[s]}$ for a fixed combination of (i, j) over s - Reaction of time series i to a shock in time series j

- There are, in total, m^2 impulse response functions

Granger Kausalität

Bivariates VAR(2)-Modell in Gleichungsschreibweise:

$$\begin{aligned}
Y_{1t} &= \Phi_{1,11}Y_{1,t-1} + \Phi_{2,11}Y_{1,t-2} \\
&+ \Phi_{1,12}Y_{2,t-1} + \Phi_{2,12}Y_{2,t-2} + c_1 + u_{1t}, \\
Y_{2t} &= \Phi_{1,21}Y_{1,t-1} + \Phi_{2,21}Y_{1,t-2} \\
&+ \Phi_{1,22}Y_{2,t-1} + \Phi_{2,22}Y_{2,t-2} + c_2 + u_{2t}.
\end{aligned}$$

Wenn $Y_{1,t-1}$ und $Y_{1,t-2}$ zur Vorhersage von Y_{2t} hilfreich ist ($\Phi_{1,21} \neq 0$, $\Phi_{2,21} \neq 0$), dann heisst Y_{2t} durch Y_{1t} im Sinne von Granger verursacht.

Granger Kausalität

Allgemein sagt man, daß Y_{jt} nicht durch Y_{kt} im Sinne von Granger verursacht wird, wenn die Koeffizienten von $Y_{k,t-1}$ und $Y_{k,t-p}$ in der j.ten Zeile des VAR(p)-Modells 0 sind:

$$\Phi_{j,1k} = \ldots = \Phi_{j,pk} = 0$$

Nach der OLS-Schätzung eines VAR(p)-Modells, kann diese Nullhypothese für jedes $k \neq j$ mittels eines statistischen Tests geprüft werden.

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

Industrial production - quarterly data for various European countries from 1970:1 to 2001:4; consider France (`ip-fra`), Germany (`ip-deu`), and Spain (`ip-esp`)

- Estimate a trivariate VAR(p)-model for relative growth rate (`r-fra`, `r-deu`, `r-esp`)

- Discuss Granger Causality Test for various model orders

EViews Exercise - Case Study Austrian Stock Exchange

Stock exchange data - weekly data from January 7, 1986 to September 22, 1992; consider Leykam (`log(p-lkm)`), Wienerberger (`log(p-wie)`), Veitascher (`log(p-vei)`)

- Estimate a trivariate VAR(p)-model for relative growth rate (`r-lkm`, `r-wie`, `r-vei`)

- Discuss Granger Causality Test for various model orders

Vorhersage mit VAR(1)-Prozessen

Wegen

$$\mathbf{Y}_{t+1} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{u}_{t+1}, \quad \boldsymbol{u}_{t+1} \sim \mathrm{Normal}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$$

gilt:

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_{t+1}|\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}).$$

Zwei Informationsquellen zur Vorhersage:

- langfristiges Niveau (stationärer Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$)
- aktuelle Abweichungen der beobachteten Werte $\mathbf{Y}_t$ vom langfristigen Niveau $\boldsymbol{\mu}$

Vorhersage mit VAR(1)-Prozessen

Der Informationswert der aktuellen Abweichungen der beobachteten Werte $\mathbf{Y}_t$ vom langfristigen Niveau $\boldsymbol{\mu}$ nimmt mit steigendem Vorhersagehorizont ab:

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_{t+l}|\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{\Phi}^l(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}).$$

Wegen der Stationarität geht $\mathbf{\Phi}^l$ gegen 0, und die Vorhersage nähert sich $\boldsymbol{\mu}$.

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

Industrial production - quarterly data for various European countries from 1970:1 to 2001:4; consider France (`ip-fra`), Germany (`ip-deu`), and Spain (`ip-esp`) - estimate various trivariate VAR(p)-models for relative growth rate defined by `dlog(ip-fra)`, `dlog(ip-deu)`, `dlog(ip-esp)`

- Discuss forecasting to the relative change rate

- Discuss forecasting of the original time series