Vorhersage von stationären VAR-Prozessen

Zwei Informationsquellen zur Vorhersage:

- langfristiges Niveau – stationärer Erwartungswert $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p)\mathbf{c}$;
- aktuelle Abweichungen der beobachteten Werte $\mathbf{Y}_t$ vom langfristigen Niveau $\boldsymbol{\mu}$

z.B Für einen VAR(1)-Prozess ergibt sich wegen

$$\mathbf{Y}_{t+1} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{u}_{t+1}, \quad \boldsymbol{u}_{t+1} \sim \mathrm{Normal}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$$

Vorhersage von stationären VAR-Prozessen

als Punkt-Vorhersage:

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_{t+1}|\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}),$$
$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_{t+l}|\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}^l(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}).$$

- Der Informationswert der aktuellen Abweichungen der beobachteten Werte $\mathbf{Y}_t$ vom langfristigen Niveau $\boldsymbol{\mu}$ nimmt mit steigendem Vorhersagehorizont ab.

- Wegen der Stationarität geht $\boldsymbol{\Phi}^l$ gegen 0, und die Vorhersage nähert sich $\boldsymbol{\mu}$.

- Das gilt auch für stationäre VAR(p)-Prozesse.

Vorhersage mit VAR-Prozessen für Unit Root Prozesse

Sind die einzelnen Zeitreihen nicht stationär, dann wird ein VAR-Modell an die Zuwächse $r_{j,t} = Y_{j,t} - Y_{j,t-1}$ angepasst, und die Vorhersage der Level der ursprüglichen Prozesse $Y_{1,t}, \ldots, Y_{m,t}$ läuft dann in zwei Stufen.

1. Vorhersage der Veränderungsraten $\hat{r}_{j,t+1}$, . . . , $\hat{r}_{j,t+l}$ aus dem stationären VAR(p)-Modell. Wegen der Vernetzung im Modell beinhaltet die Vorhersage etwa der Veränderungsrate $\hat{r}_{1,t+1}$ des ersten Prozesses Information über die Veränderungsraten aller anderen Prozesse zum Zeitpunkt t.

Vorhersage mit VAR-Prozessen für Unit Root Prozesse

2. Während bei der Modellierung von $r_{j,t}$ die Zeitreihen untereinander vernetzt sind, läuft die Vorhersage der Level getrennt für jede Zeitreihe durch Summation der zugehörigen Veränderungsraten, z.B. für eine Einschrittvorhersage:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{1,t+1} &= Y_{1,t} + \hat{r}_{1,t+1}, \\ &\vdots \\ \hat{Y}_{m,t+1} &= Y_{m,t} + \hat{r}_{m,t+1}, \end{aligned} \tag{4}$$

Vorhersage mit VAR-Prozessen für Unit Root Prozesse

bzw. für Mehrschrittvorhersagen:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{1,t+l} &= Y_{1,t} + \hat{r}_{1,t+1} + \cdots + \hat{r}_{1,t+l}. \qquad (5) \\ &\vdots \\ \hat{Y}_{m,t+l} &= Y_{m,t} + \hat{r}_{m,t+1} + \cdots + \hat{r}_{m,t+l}. \end{aligned}$$

Es ist deutlich, daß in die Vorhersage des Levels des j.ten Prozesses nur Information über den Level $Y_{j,t}$, nicht aber Information über die Levels der anderen Prozesse eingeht.

Vorhersage mit VAR-Prozessen für Unit Root Prozesse

Wie im univariaten Fall, hat die Konstante c im VAR-Modell einen wesenlichen Einfluß auf das Erscheinungsbild einer mittel- bis langfristigen Vorhersage von nicht-stationären Zeitreihen:

- Wurde für die Veränderungsrate ein VAR-Modell mit Konstante $c \neq 0$ (drift) geschätzt, so nähert sich $\hat{r}_{j,t+l}$ einem von 0 verschiedenen Wert an und die Vorhersage des Levels $\hat{Y}_{j,t+l}$ zeigt mittel- bis langfristig die Gestalt einer linearen Trendfunktion.

- Wurde die Konstante aus dem VAR-Modell entfernt ($c = 0$), so nimmt die Vorhersage aller Levels $\hat{Y}_{j,t+l}$ langfristig einen konstanten Wert an.

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

Industrial production - quarterly data for various European countries from 1970:1 to 2001:4; consider France (`ip-fra`), Germany (`ip-deu`), and Spain (`ip-esp`) - estimate various trivariate VAR(p)-models for relative growth rate defined by `dlog(ip-fra)`, `dlog(ip-deu)`, `dlog(ip-esp)`

- Discuss forecasting of the relative change rate

- Discuss forecasting of the levels of the time series

- Show how confidence bands are obtained

Nichtstationäre VAR-Prozesse

Stationaritätsbedingung: alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{F}$ sind betragsmäßig kleiner als 1.

Eine spezielle Form der Nichtstationarität liegt vor, wenn mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{F}$ am Einheitskreis liegt (Betrag gleich 1), während die restlichen Eigenwerte innerhalb des Einheitskreises liegen.

Interessanterweise liegt genau diese Form der Nichtstationarität für viele makroökonomische Zeitreihen sowie für Zeitreihen, die auf den Finanzmärkten beobachtet werden, vor, wenn die **ursprünglichen levels** (nicht die Zuwächse) mit einem VAR-Modell beschrieben werden.

EViews Exercise - Case Study Austrian Stock Exchange

Stock exchange data - weekly data from January 7, 1986 to September 22, 1992; consider Leykam (`log(p-lkm)`), Wienerberger (`log(p-wie)`), Veitascher (`log(p-vei)`)

- Estimate individual AR(p)-Models for `log(p-lkm)`, `log(p-wie)` and `log(p-vei)` using the VAR(p)-window with a single time series and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$.

- Estimate VAR(3)-Model for `log(p-lkm)`, `log(p-wie)` and `log(p-vei)` and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$.

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

Industrial production - quarterly data for various European countries from 1970:1 to 2001:4; consider France (`ip-fra`), Germany (`ip-deu`), and Spain (`ip-esp`)

- Estimate individual AR(p)-Models for `log(ip-deu)`, `log(ip-fra)`, `log(ip-esp)` using the VAR(p)-window with a single time series and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$.

- Estimate VAR(3)-Model for `log(ip-deu)`, `log(ip-fra)`, `log(ip-esp)` and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$.

Dickey-Fuller unit root test/Dickey-Fuller regression

The AR(1)-process $Y_t = \varphi Y_{t-1} + \delta + u_t$ can be reformulated as

$$r_t = Y_t - Y_{t-1} = (\varphi - 1)Y_{t-1} + \delta + u_t.$$

Reformulate AR(2)-process $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \delta + u_t$:

$$r_t = (\varphi_1 + \varphi_2 - 1)Y_{t-1} - \varphi_2 r_{t-1} + \delta + u_t.$$

Reformulate AR(p)-process $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \delta + u_t$:

$$r_t = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_p - 1)Y_{t-1} + \varphi_1^* r_{t-1} + \cdots + \varphi_{p-1}^* r_{t-p+1} + \delta + u_t. \tag{6}$$

Dickey-Fuller unit root test/Dickey-Fuller regression

- The process Y_t is a unit process, if the information about the level of the process disappears from the Dickey-Fuller regression (6), i.e. if the sum of AR-coefficients is equal to 1:

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_p = 1.$$

- The Dickey-Fuller unit root test tests the null hypothesis that $\gamma = \varphi_1 + \cdots + \varphi_p - 1 = 0$ (unit root is present).

- If $\gamma = 0$, then the process of differences r_t (growth process) is a stationary AR(p-1)-process.

Extension to multivariate time series

The VAR(1)-process $\mathbf{Y}_t = \mathbf{\Phi}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{c} + \boldsymbol{u}_t$ can be reformulated as

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_{t-1} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{I})\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{c} + \boldsymbol{u}_t.$$

The VAR(2)-process $\mathbf{Y}_t = \mathbf{\Phi}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2\mathbf{Y}_{t-2} + \mathbf{c} + \boldsymbol{u}_t$ can be reformulated as

$$\mathbf{r}_t = (\mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 - \mathbf{I})\mathbf{Y}_{t-1} - \mathbf{\Phi}_2\mathbf{r}_{t-1} + \mathbf{c} + \boldsymbol{u}_t.$$

Extension to multivariate time series

A VAR(p)-process can be reformulated as

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_1^{\star}\mathbf{r}_{t-1} + \ldots + \mathbf{\Phi}_{p-1}^{\star}\mathbf{r}_{t-p-1} + \mathbf{c} + \boldsymbol{u}_t, \quad (7)$$

where $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_1 + \ldots + \mathbf{\Phi}_p - \mathbf{I}$.

The matrix $\mathbf{A}$ contains information about stationarity/non-stationarity of the original time series.

Extension to multivariate time series

Case I: all time series $\mathbf{Y}_t$ are stationary

- The matrix $\mathbf{A}$ is invertible.
- The original processes $\mathbf{Y}_t$ are stationary, a VAR-model can be estimated for the levels $\mathbf{Y}_t$, the long run mean is equal to $\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$.
- Mathematical criteria: the rank of $\mathbf{A}$ is equal to m (the number of time series) or all eigenvalues of $\mathbf{A}$ are different from 0.

Extension to multivariate time series

- For a VAR(1)-process, the eigenvalues of the matrix $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi} - \mathbf{I}$ are equal to the eigenvalues of $\mathbf{\Phi}$ minus 1.

- Hence, if the original processes are stationary, then all eigenvalues of $\mathbf{\Phi}$ lie within the unit circle and all eigenvalues of $\mathbf{A} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{I})$ are different from 0.

- For a general VAR(p)-process, the eigenvalues of the matrix $\mathbf{A}$ are obtained from the eigenvalues of the matrix $\mathbf{F}$ defined above.

- If the original processes are stationary, then all eigenvalues of $\mathbf{F}$ lie within the unit circle and all eigenvalues of $\mathbf{A}$ are different from 0.

Extension to multivariate time series

Case II: the first differences $\mathbf{r}_t = \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_{t-1}$ are stationary

- The matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ is equal to the null matrix.
- In this case, the level of the original time series are non-stationary.
- Because $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, the information about the levels disappears from (7). The processes of first differences $\mathbf{r}_t$ is stationary and follows a VAR(p-1)-process.
- Mathematical criteria: the rank of $\mathbf{A}$ is equal to 0 or all eigenvalues of $\mathbf{A}$ are equal to 0.

Extension to multivariate time series

- For a VAR(1)-process, the eigenvalues of the matrix $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi} - \mathbf{I}$ are equal to the eigenvalues of $\mathbf{\Phi}$ minus 1.

- Hence, if all m eigenvalues of $\mathbf{\Phi}$ lie on the unit circle, then all eigenvalues of $\mathbf{A} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{I})$ are equal to 0.

- General VAR(p)-process: all eigenvalues of the matrix $\mathbf{A}$ are equal to 0, if at least m eigenvalues of $\mathbf{F}$ lie on the unit circle.

Extension to multivariate time series

Additional cases?

- What if not all, but only some eigenvalues of $\mathbf{A}$ are different from 0?

- Or equivalently: what if less than m eigenvalues of $\mathbf{F}$ lie on the unit circle?

- In this case, the original time series are non-stationary, but cointegrated.

- Subsequently, only bivariate time series are discussed.

Extension to multivariate time series

For bivariate time series, the matrix $\mathbf{A}$ is a 2×2-matrix which has 2 eigenvalues. Only 3 possible cases:

- At least two eigenvalue of $\mathbf{F}$ lie on the unit circle $\Rightarrow$ both eigenvalues of $\mathbf{A}$ are equal to 0 $\Rightarrow$ the time series are non-stationary, first differences follow a VAR(p-1)-model

- Exactly one eigenvalue of $\mathbf{F}$ lies on the unit circle, all others within $\Rightarrow$ one eigenvalues of $\mathbf{A}$ is equal to 0, the other different from 0 $\Rightarrow$ the time series are non-stationary, but cointegrated

- All eigenvalues of $\mathbf{F}$ lie within the unit circle $\Rightarrow$ both eigenvalues of $\mathbf{A}$ are different from 0 $\Rightarrow$ the time series are stationary

Test von Johansen im bivariaten VAR(p)-Modell

Der Test von Johansen testet zuerst die Nullhypothese, dass **beide** Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_1 + \ldots + \mathbf{\Phi}_p - \mathbf{I}$ null sind.

Das ist äquivalent mit dem Test, dass mindestens 2 Eigenwerte von $\mathbf{F}$ am Einheitskreis liegen.

- Kann die Nullhypothese nicht verworfen werden, so sind die Zeitreihen instationär und es wird der Differenzenprozess gebildet. Im Differenzenprozess sind zwei der Eigenwerte von $\mathbf{F}$, die gleich 1 waren, verschwunden.

- Wird diese Nullhypothese abgelehnt, so wird weiter getestet.

Test von Johansen im bivariaten VAR(p)-Modell

Der Test von Johansen testet bei Ablehnen der vorigen Nullhypothese sodann die nächste

> Nullhypothese, dass **mindestens ein** Eigenwert der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_1 + \ldots + \mathbf{\Phi}_p - \mathbf{I}$ null ist.

- Wird diese Nullhypothese abgelehnt, so folgt daraus, dass **kein Eigenwert von $\mathbf{A}$ null ist, daher ist der Prozess stationär.**

- Kann die Nullhypothese nicht verworfen werden, so sind die Zeitreihen instationär, aber kointegriert.

Test von Johansen im bivariaten VAR(p)-Modell

- Basis für den Test ist die geschätzte Matrix $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{\Phi}}_1 + \ldots + \hat{\mathbf{\Phi}}_p - \mathbf{I}$ und deren Eigenwerte, die abfallend sortiert werden.

- $\hat{\mathbf{A}}$ ist eine 2×2 Matrix und hat daher zwei Eigenwerte $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_2$ (mit $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2$).

- Wegen des Schätzfehlers zwischen $\mathbf{A}$ und $\hat{\mathbf{A}}$ muss getestet werden, ob die geschätzten Eigenwerte $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_2$ signifikant von 0 verschieden sind.

Test von Johansen im bivariaten VAR(p)-Modell

Die Nullhypothese, dass zwei (oder mindestens 1) Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ null sind, beruht darauf zu testen, ob die geschätzten Eigenwerte $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ (bzw. $\hat{\lambda}_2$) signifikant von 0 abweichen. Dazu werden zwei Statistiken verwendet ($r = 2$ oder $r = 1$):

- Die Trace-Statistik (N ist die Anzahl der Beobachtungen):

$$-N \cdot \sum_{j=2-r+1}^{2} \log(1 - \hat{\lambda}_j)$$

Test von Johansen im bivariaten VAR(p)-Modell

- Die Maximum-Eigenvalue-Statistik:

$$-N \log(1 - \hat{\lambda}_{2-r+1})$$

Diese Statistiken können unter Gültigkeit der jeweiligen Nullhypothese nicht beliebig groß werden, und werden für einen konkreten Test mit den passenden kritischen Werten verglichen. Übersteigen diese Statistiken den kritischen Wert, so wird die Nullhypothese verworfen.

EViews Exercise - Case Study Austrian Stock Exchange

- Estimate VAR(3)-model for `log(p-wie)` and `log(p-vei)` and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$ $\Rightarrow$ VAR(3)-model is probably non-stationary

- Perform the Johansen test $\Rightarrow$ original time series non-stationary, estimate VAR(2)-model for `dlog(p-wie)` and `dlog(p-vei)` and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$ $\Rightarrow$ VAR(2)-model for differences stationary

- Granger Causality test $\Rightarrow$ individual AR-modelling of each time series is preferable

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

- Estimate VAR(3)-model for `log(ip-deu)` and `log(ip-fra)` and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$ $\Rightarrow$ VAR(3)-model is probably non-stationary

- Perform the Johansen test $\Rightarrow$ original time series non-stationary, estimate VAR(2)-model for `dlog(ip-deu)` and `dlog(ip-fra)` and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$ $\Rightarrow$ VAR(2)-model for differences stationary

- Granger Causality test $\Rightarrow$ VAR-modelling of both time series rather than individual modelling

EViews Exercise - Case Study Industrial Production

- Estimate VAR(3)-model for `log(ip-fra)` and `log(ip-esp)` and consider the eigenvalues of the appropriate $\mathbf{F}$ VAR(3)-model is probably non-stationary

- Perform the Johansen test $\Rightarrow$ the original time series are non-stationary, but cointegrated