Vorlesungsskript Finanzmathematik I

Thorsten Schmidt und Rüdiger Frey[1]

Version von 18. Januar 2008

[1] Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Leipzig, Augustusplatz 10/11 04109 Leipzig Germany. Email: thorsten.schmidt@math.uni-leipzig.de

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **5**

1.1 Einführung 5

1.2 Derivative Produkte 6

1.2.1 Zinsen und Nullkuponanleihen 6

1.2.2 Terminverträge 7

1.2.3 Bewertung von Terminverträgen 7

1.3 Optionen 9

1.3.1 Vertragseigenschaften und Anwendungen 9

1.3.2 Wertgrenzen für Optionen: Der Fall ohne Dividenden 11

1.3.3 Wertgrenzen für Optionen: Der Fall mit Dividenden 14

1.3.4 Optionsstrategien 14

2 Einperiodenmodell **17**

2.1 Das Modell 17

2.2 Arbitragefreiheit und Zustandspreise/ Martingalwahrscheinlichkeiten 19

2.2.1 Arbitragefreiheit und Zustandspreise 19

2.2.2 Zustandspreise und risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße 21

2.3 Eindeutigkeit von Zustandspreisen und Marktvollständigkeit 22

2.4 Unvollständige Märkte 23

2.4.1 Preisschranken für nicht erreichbare bedingte Auszahlungen 23

2.4.2 Superreplikation 23

2.4.3 Quadratic Hedging 26

2.5 Einführung in die Portfoliooptimierung 27

2.5.1 Problemstellung 27

2.5.2 Direkte Lösung mittels Bedingungen erster Ordnung 28

2.5.3 Der Martingalansatz. 29

3 Mehrperiodenmodelle **31**

3.1 Modell und grundlegende Begriffe . . . 31

3.2 Arbitragefreiheit und Martingalmaße . . . 33

3.3 Der 2. Hauptsatz der Wertpapierbewertung . . . 36

3.4 Das Cox-Ross-Rubinstein (CRR) Modell . . . 36

3.4.1 Das Modell . . . 36

3.4.2 Das äquivalente Martingalmaß . . . 37

3.4.3 Vollständigkeit und Hedging-Strategien . . . 38

3.4.4 Optionen im CRR-Modell . . . 39

3.5 Konvergenz der Optionspreise im Binomialmodell und Black-Scholes-Formel . . . 43

3.5.1 Konvergenz unter dem historischen Maß . . . 43

3.5.2 Konvergenz unter dem Martingalmaß . . . 44

3.5.3 Die Black-Scholes Formel . . . 46

3.5.4 Eigenschaften von Call- und Putpreisen . . . 48

3.6 Optimales Stoppen und Amerikanische Optionen . . . 50

3.6.1 Optimales Stoppen . . . 50

3.6.2 Amerikanische Optionen . . . 53

4 Der Zinsmarkt **57**

4.1 Einführung . . . 57

4.1.1 Das Bankkonto . . . 59

4.1.2 Floating Rate Notes . . . 60

4.1.3 Swaps . . . 60

4.1.4 Das Konzept der Duration . . . 61

A Martingale in diskreter Zeit **63**

A.1 Grundlagen . . . 63

A.1.1 Bedingte Erwartungserte. . . . 63

A.1.2 Martingale . . . 64

A.1.3 Diskrete stochastische Integrale. . . . 66

A.2 Stoppzeiten und Optionales Stoppen . . . 66

A.3 Doob-Zerlegung und Supermartingale . . . 69

Vorwort

Das vorliegende Skript ist die ausgearbeitete Version der Vorlesung Finanzmathematik I, wie Sie im WS 2007/08 von Thorsten Schmidt gehalten wurde. Sie geht im wesentlichen auf die zuvor im WS 2005/2006 von Rüdiger Frey und Thorsten Schmidt an der Universität Leipzig gehaltene Vorlesung zurück. Gegenstand der Vorlesung war eine Einführung in die Finanzmathematik in diskreter Zeit. Die Stoffauswahl orientiert sich an dem in der Literatur üblichen Kanon.

In der gegenwärtigen Fassung erhebt das Skript nicht den Anspruch eines fertig ausgearbeiteten Lehrbuchs. Trotz der Bemühungen der Autoren gibt es einige Inkonsistenzen in der Notation und sicher auch noch zahlreiche (hoffentlich) kleinere Fehler. Für Verbesserungsvorschläge (am besten per email an die Autoren[2]) sind wir dankbar. Wir danken A. Rahn, S. Gallitschke und M. Schachtschneider für das gründliche Lesen des Manusskripts.

Thorsten Schmidt Rüdiger Frey

[2] ruediger.frey@math.uni-leipzig.de, thorsten.schmidt@math.uni-leipzig.de

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einführung

Fragestellungen der modernen Finanzmathematik

- **Bewertung und Absicherung von Derivaten.** Derivate sind Wertpapiere, deren Wert bei Fälligkeit sich vom Preis eines gehandelten Basisgutes ableitet. Basisgüter können Wertpapiere (Aktien, Devisen, Anleihen) oder Rohstoffe (Erdöl, Energiepreise, etc.) sein. Inzwischen gibt es auch Derivate, bei denen das Basisgut kein gehandeltes Gut ist, wie etwa im Fall von Wetter- oder Versicherungsderivaten.
- **Portfoliooptimierung.** Hier geht es um die Zusammenstellung von Portfolios, die unter Risiko vs. Ertragsgesichtspunkten „optimal“ sind, unter Umständen unter Berücksichtigung von gesetzlichen Nebenbedingungen.

Eng verwandte Fragestellungen sind

- **Risikomanagement.** Hier geht es um Messung und Steuerung von Finanzrisiken. Es gibt enge Bezüge zur Finanzmathematik; im Risikomanagement stehen aber statistische Fragen und die Betrachtung von aggregierten Portfolios aus sehr vielen Finanzinstrumenten mehr im Vordergrund.
- **Statistik der Finanzmärkte.** Hier geht es um die Analyse von Finanzdaten und die Schätzung von Modellen zur Beschreibung von Finanzdaten.
- **Finanzmarktökonomie.** Diese Disziplin analysiert die Preisbildung an Finanzmärkten aus ökonomischer Sicht.
- **Versicherungsmathematik.** Es gibt zahlreiche Berührungspunkte zwischen beiden Disziplinen; insbesondere sind Grundkenntnisse in Finanzmathematik auch für Versicherungsmathematiker sehr wichtig, etwa im Zusammenhang mit Anlagerisiken.

Die verwendeten mathematischen Techniken entstammen der Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie, stochastische Prozesse, Statistik); daneben kommen auch Techniken aus Optimierung, Analysis (etwa partielle Differentialgleichungen) und Numerik zum Einsatz.

Literatur. Es gibt mittlerweile eine Reihe von guten Einführungen in die Finanzmathematik. Das vorliegende Skript orientiert sich an den Büchern Bingham & Kiesel (2004), Shreve (2004) und Pliska (1997). Ausgezeichnete weiterführende Text sind Föllmer & Schied (2004), Delbaen & Schachermayer (2006). Finanzmathematik in stetiger Zeit wird in der Vorlesung im nächsten Semester behandelt. Die benötigten Hilfsmittel aus der konvexen Analysis und linearen bzw. konvexen Optimierung findet man etwa in Bertsimas & Tsitsiklis (1997) und Bertsekas (1999).

1.2 Derivative Produkte

1.2.1 Zinsen und Nullkuponanleihen

Sei $t < T$. Die Nullkuponanleihe $B(t,T)$ gibt den heutigen (Zeit t) Preis einer Geldeinheit in T an; $B(t,T)$ wird auch als Diskontfaktor bezeichnet. Der Preis $B(t,T)$ hat die folgende Eigenschaft:

- positive Zinsen $\Rightarrow B(t,T) \leq 1$
- kein Konkursrisiko (default risk), etwa im Fall von Staatsanleihen $\Rightarrow B(T,T) = 1$.

Nullkuponanleihen werden an Finanzmärkten gehandelt, speziell für relativ kleine Restlaufzeiten $T-t$. Darüber hinaus sind Nullkuponanleihen aber auch ein wichtiges Gedankenkonstrukt etwa bei der Analyse von Zinsmärkten; so lassen sich die Preise der meisten gehandelten Anleihen als Linearkombination der Preise von Nullkuponanleihen darstellen.

Zinsen. Auf Zins- und Anleihemärkten werden Preise von Nullkuponanleihen häufig nicht direkt angegeben; stattdessen werden Zinssätze quotiert. Hier gibt es verschiedene Marktkonventionen.

(i) Diskrete Verzinsung (Zinseszinseffekte nur zu diskreten Zeitpunkten).

- jährliches compounding. Sei $T \in \mathbb{N}$. Bei jährlichen compounding ist der Zinssatz r_c, der zur Nullkuponanleihe $B(0,T)$ gehört, durch die Gleichung

$$B(0,T) = \frac{1}{(1+r_c)^T} \tag{1.1}$$

  gegeben; r_c hängt im Allgemeinen von T ab.

- n-faches compounding pro Jahr, etwa halb- oder vierteljährlich, aber Annualisierung (Skalierung auf Jahresbasis). Der zugehörie Zinssatz $r_{c,n}$ ist durch die Gleichung

$$B(0,T) = \frac{1}{(1+\frac{r_{c,n}}{n})^{nT}} \tag{1.2}$$

  definiert und hängt wiederum von T ab.

- LIBOR-rates. Ein Spezialfall ist die LIBOR-Rate mit Laufzeit $\alpha = \frac{1}{n}$ ($\alpha = 1/2$ oder $\alpha = 1/4$ in der Praxis). Die LIBOR-Rate $L(0,\alpha)$ in $t = 0$ mit compounding Periode α ist durch

$$B(0,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha\, L(0,\alpha)} \tag{1.3}$$

  gegeben. Der Name LIBOR steht für „London InterBank Offered Rate“ und hängt mit der Art zusammen, in der LIBOR-Raten quotiert werden.

(ii) kontinuierliche Verzinsung (auf Märkten weniger verbreitet, aber üblich in der Theorie zeitstetiger Zinsmodelle). Die *continously compounded yield* $y(0,T)$ ist durch die Gleichung

$$B(0,T) = \exp\left(-y(0,T)\ T\right) \tag{1.4}$$

definiert, d.h. $y(0,T) = -\frac{1}{T}\ln B(0,T)$. Die yield $y(0,T)$ kann als Grenzwert des Zinssatzes $r_{c,n}$ für $n \to \infty$ betrachtet werden, da $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Für großes n ist die rechte Seite von (1.2) $\approx e^{-T\ r_{c,n}}$. Die Kurve $T \to y(0,T)$ heißt *Zinsstrukturkurve* im Zeitpunkt $t = 0$.

1.2.2 Terminverträge

Terminverträge (engl. forward contracts) sind die einfachsten Beispiele für derivative Finanzprodukte.

Definition 1.2.1. Ein Terminvertrag ist eine zum Zeitpunkt t eingegangene *Verpflichtung*,

- ein Gut G mit Preis $G(t)$ -das Underlying-
- zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T > t$ -dem Fälligkeitszeitpunkt-
- zu einem in t festgelegten Basispreis K

zu kaufen.

Typischerweise wird der Basispreis so festgelegt, dass das Eingehen der Kaufverpflichtung im Zeitpunkt t kostenlos ist; in diesem Fall nennt man den Basispreis *Terminpreis*; der Terminpreis für das Gut im Zeitpunkt t sei mit $F^G(t,T)$ bezeichnet.

In der Praxis werden Terminverträge auf Wertpapiere und Devisen, aber auch auf Rohstoffe wie Edelmetalle, Rohöl oder Strom abgeschlossen. Terminverträge dienen meist der Risikokontrolle, etwa indem sie Unternehmen helfen, Wechselkursrisiken auszuschließen.

Manchmal spricht man bei Definition 1.2.1 auch von einer **long position** in einem Terminvertrag; die Verpflichtung, das Gut G im Zeitpunkt $T > t$ zum in t festgelegten Preis zu verkaufen bzw. zu liefern heißt entsprechend **short position**. Der Preis $G(t)$ des Gutes im Zeitpunkt t wird manchmal als **spot-Preis** bezeichnet.

Der Wert bei Fälligkeit eines Terminvertrages in Abhängigkeit des Preises $G(T)$ ist durch $G(T) - K$ gegeben; entsprechend ist der Wert einer short position gleich $-(G(T) - K) = K - G(T)$. Gilt $K = F^G(t,T)$, so macht man bei einer long position in einem Terminvertrag einen Gewinn (bzw. Verlust), falls $G(T) > F^G(t,T)$ (bzw. $G(T) < F^G(t,T)$).

1.2.3 Bewertung von Terminverträgen

Falls das Gut G ein gehandeltes Wertpapier ist, so lässt sich der Preis des Terminvertrages bzw. der Terminpreis leicht ermitteln. Man argumentiert, dass es an einem Finanzmarkt auf Dauer keine risikofreien Gewinnmöglichkeiten (sogenannte Arbitragemöglichkeiten) gibt; eine formale Definition wird in Definition 2.2.1 gegeben. Die Annahme der Arbitragefreiheit ist sinnvoll, da vorhandene Arbitragemöglichkeiten von Investoren ausgenutzt werden und somit nicht von Dauer sind.

Lemma 1.2.2. *Sei $S(t)$ der Preis eines zu Spekulationszwecken gehandelten Wertpapiers, das im Intervall $[t,T]$ keine Dividenden oder Zinsen auszahlt. Dann ist in einem arbitragefreien Markt der Wert des Terminvertrages auf S mit Fälligkeit T und Basispreis K gegeben durch $S(t) - B(t,T)K$. Speziell gilt also für den Terminpreis $F^S(t,T) = \frac{S(t)}{B(t,T)} \geq S(t)$.*

Beweis: Zum Beweis bilden wir die Auszahlung des Terminvertrages durch ein Portfolio aus Wertpapieren und Nullkuponanleihen nach. Den zunächst unbekannten Wert einer long Position im Terminvertrag sei mit x bezeichnet.

Portfolio	Wert in t	Wert in T
• Kaufe eine Einheit von S	$S(t)$	$S(T)$
• Verkaufe K Nullkuponanleihen $B(\cdot,T)$ bzw. leihe $\frac{K}{B(t,T)}$ Geldeinheiten	$-KB(t,T)$	$-K$
• Halte short position in Terminvertrag	$-x$	$-\big(S(T)-K\big)$
	$S(t) - K(B(t,T) - x$	0

Das betrachtete Portfolio hat in T den Wert 0, und hat, da wir Zins- und Dividendenzahlungen ausgeschlossen haben, auch keine Zahlungen zu anderen zukünftigen Zeitpunkten. In einem arbitragefreien Markt muss also auch der heutige Wert des Portfolios gleich Null sein. Es folgt $x = S(t) - KB(t,T)$. Der Terminpreis $F^S(t,T)$ ist derjenige Wert von K, so dass $x = 0$. Auflösen nach K liefert $F^S(t,T) = \frac{S(t)}{B(t,T)} \geq S(t)$, da bei nicht-negativen Zinsen $B(t,T) \leq 1$. ■

Das im Beweis von Lemma 1.2.2 verwandte Portfolioargument wird auch als cash-and-carry Arbitrage bezeichnet.

Terminverträge auf Devisen. Hier ist eine Modifikation der im Beweis von Lemma 1.2.2 verwendeten cash-and-carry Arbitrage nötig, um den Zinsertrag einer Anlage in ausländischer Wärung zu berücksichtigen. Wir verwenden folgende Notation:

- $e(t)$ bezeichne den Wechselkurs im Zeitpunkt t (Anzahl Euros pro Einheit der ausländischen Währung)
- $B^d(t,T)$ sei der Preis einer deutschen Nullkuponanleihe
- $B^f(t,T)$ sei der Preis in ausländischer (foreign) Währung einer ausländischen Nullkuponanleihe.

Lemma 1.2.3. *In einem arbitragefreien Markt ist der Terminpreis der ausländischen Währung gegeben durch*

$$F^e(t,T) = e(t)\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}. \tag{1.5}$$

Die Beziehung in (1.5) wird oft auch als **gedeckte Zinsparität** bezeichnet.

Beweis: Wir verwenden wiederum ein Portfolioargument:

Portfolio	Wert in t (in €)	Wert in T (in €)
• Kaufe $B^f(t,T)$	$e(t)B^f(t,T)$	$e(T)$
• Leihe $e(t)B^f(t,T)$ Geldeinheiten (verkaufe $e(t)\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$ Nullkuponanleihen)	$-e(t)B^f(t,T)$	$-\frac{e(t)B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$
• Halte short position im forward mit $K = F^e(t,T)$	0	$-\big(e(T) - F^e(t,T)\big)$
	0	$F^e(t,T) - e(t)\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$

Die Behauptung folgt, da der Wert des Portfolios in T bereits im Zeitpunkt t bekannt ist und somit gleich Null sein muss, um Arbitrage auszuschließen. ■

Terminverträge auf commodities (Güter, wie Rohstoffe und Edelmetalle). Hier gibt es zwei wesentliche Unterschiede zu sogenannten financial forwards.

(i) Die Lagerkosten können beträchtlich sein.

(ii) Commodities werden überwiegend zu Produktionszwecken und nicht aus spekulativen Gründen gekauft.

Beide Punkte führen zu einer Modifikation der Bewertungsargumente. Aufgrund von Punkt (i) haben wir folgende Obergrenze für den Terminpreis auf eine commodity

$$F^G(t,T) \leq \frac{G(t) + L}{B(t,T)},$$

wobei $G(t)$ der spot-Preis des Gutes und L der Gegenwartswert der Lagerkosten ist.

Falls das Gut überwiegend zu Spekulationszwecken gehalten wird, etwa im Fall von Edelmetallen, so gilt die Untergrenze $F^G(t,T) \geq \frac{G(t)}{B(t,T)}$. Falls nämlich $F^G(t,T) < G(t)$, so kann man durch eingehen einer long position im Terminvertrag und gleichzeitiges Verkaufen von G einen Arbitragegewinn machen. Wird G dagegen überwiegend zu Produktionszwecken eingesetzt, so ist short selling von G häufig nicht möglich, und es lässt sich keine Untergrenze für $F^G(t,T)$ angeben. Auf Terminmärkten wird die folgende Terminologie verwendet:

- $F^G(t,T) > G(t) \Rightarrow$ Markt ist in contango (financial forwards)
- $F^G(t,T) < G(t) \Rightarrow$ Markt ist in backwardation.

Rohölmärkte sind meist in backwardation; dies ist aber nicht zwangsläufig der Fall.

1.3 Optionen

1.3.1 Vertragseigenschaften und Anwendungen

Definition 1.3.1. Betrachte ein Wertpapier S (Aktie oder ausländische Währung). Eine **europäische Call Option** ist das Recht, das Wertpapier in einem zukünftigen festen Zeitpunkt

T zu einem heute fixierten Preis K zu kaufen. K heißt **Ausübungspreis** (exercise price, strike), $T - t$ heißt **Restlaufzeit**.
Eine **europäische Put Option** ist das Recht, das Wertpapier in einem zukünftigen festen Zeitpunkt T zu einem heute fixierten Preis K zu verkaufen.
Eine **amerikanische Call (bzw. Put) Option** ist das Recht, das Wertpapier zu einem beliebigen zukünftigen Zeitpunkt $t \leq T$ zu einem heute fixierten Preis zu kaufen (bzw. zu verkaufen).

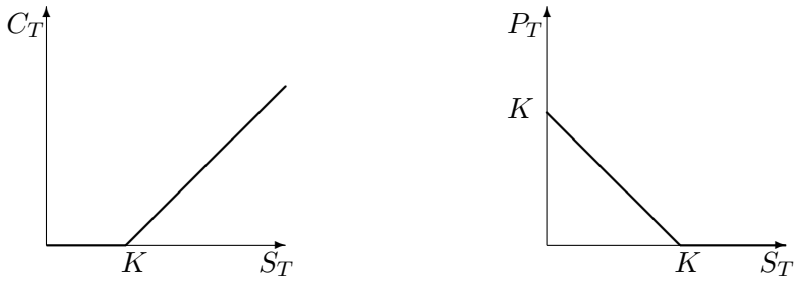
Auszahlungsprofil bei Fälligkeit. Wir betrachten zunächst die Call Option. Ein rationaler Investor wird das Optionsrecht nur ausüben, falls $S(T) > K$ (anderenfalls kann er die Aktie billiger am Markt kaufen); in diesem Fall erzielt er einen Gewinn in Höhe von $S(T)-K$. Insgesamt ist die Auszahlung einer Call Option also durch

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} =: (S_T - K)^+ \tag{1.6}$$

gegeben. Analog ergibt sich für die Endauszahlung der Put Option

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\} =: (K - S_T)^+.$$

Die folgende Abbildung illustriert obige Auszahlungsschemata.



Optionen im Risikomanagement.

Beispiel 1.3.2 (Absichern eines Aktiendepots mit Put Optionen). Ein Anleger hält heute (Zeitpunkt $t = 0$) 10 Akien im Depot mit heutigem Kurs S_0. Er möchte vermeiden, dass der Wert der Aktienposition im zukünftigen Zetpunkt $t = 1$ unter den heutigen Wert $V_0 = 10S_0$ fällt.
Deshalb kauft er heute 10 europäische Put Optionen auf S mit Ausübungspreis $K = S_0$. Damit haben wir in $t = 1$ den Wert

$$V_1 = \begin{cases} 10(S_1 + 0) & \text{falls } S_1 > S_0 \\ 10(S_1 + (S_0 - S_1)) = 10S_0 & \text{falls } S_1 < S_0. \end{cases}$$

Der Investor hat keinen Verlust, aber in $t = 0$ ist eine Zahlung der Optionsprämie erforderlich.

Beispiel 1.3.3 (Absichern des Wechselkursrisikos bei Rohöllieferung). Firma A erwartet in einem Monat eine in USD fakturierte Rohöllieferung im Wert von 1 Mio. EUR. e_1 sei der heute unbekannte USD/EUR Wechselkurs in einem Monat, $e_0 = 1.15$ sei der heutige Wechselkurs. Zur Vereinfachung seien die USD und EUR-Zinsen gleich. Betrachte nun die folgenden Strategien:

- Strategie 0: „Mache gar nichts.“
- Strategie 1 (Terminvertrag): Kaufe 1 Mio. USD auf Termin mit Basispreis $K = e_0 = 1.15$ (nach Lemma 1.2.3 ist dann heute keine Zahlung fällig)
- Strategie 2 (Option): Kaufe 1 Mio. Calls auf USD mit Fälligkeit in einem Monat und Basispeis $K = 1.15$; Zahle pro Option eine Prämie von C_0.

Was passiert in einem Monat?

	$e_1 = 1.20$ (USD steigt)	$e_1 = 1.10$ (USD fällt)
Strategie 0	1.1 Mio.	1.2 Mio.
Strategie 1	1.15 Mio.	1.15 Mio.
Strategie 3	$(1.15 + C_0)\cdot$ 1 Mio.	$(1.1 + C_0)\cdot$ 1 Mio.

Das Termingeschäft bietet Schutz bei steigendem Dollar, ist aber „riskant“ bei fallendem Dollarkurs. Die Option bietet immer Schutz, dafür ist aber heute eine Prämienzahlung fällig. Die „richtige“ Absicherungsstrategie hängt von der Situation von Firma A ab.

1.3.2 Wertgrenzen für Optionen: Der Fall ohne Dividenden

In diesem Abschnitt diskutieren wir Wertgrenzen für Optionen auf Aktien. Wir machen die Grundvoraussetzung, dass die Aktie zwischen dem gegenwärtigen Zeitpunkt t und der Fälligkeit T der Option keine Dividenden zahlt.

Wie oben erwähnt, ist für einen europäischen Call mit Ausübungszeitpunkt T und Ausübungswert K auf die Aktie S die Auszahlung in T gerade $(S_T - K)^+$, für einen Put $(K - S_T)^+$. Nehmen wir zunächst einmal an, dass die Aktie keine Dividende zahlt. Des weiteren setzen wir voraus, dass in dem betrachteten Markt keine Arbitragestrategien[1] existieren. Wir erhalten folgende Wertgrenzen für den Call.

Lemma 1.3.4. *Für den Preis des europäischen Calls C_t zur Zeit $t < T$ gilt unter der Voraussetzung, dass die Aktie bis zum Zeitpunkt T keine Dividende zahlt*

$$\big(S_t - KB(t,T)\big)^+ \leq C_t \leq S_t. \tag{1.7}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst $C_t \leq S_t$ und danach $C_t \geq S_t - KB(t,T)$.

(i) „$C_t \leq S_t$“. Wir nehmen an, dass $C_t > S_t$. Betrachte die folgende Arbitragestragestrategie:

Portfolio	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
• Verkaufe Call	$-C_t$	$-C_T = 0$	$-C_T = -(S_T - K)$
• Kaufe Aktie	S_t	S_T	S_T
	$S_t - C_t < 0$	$S_T > 0$	$K > 0$

Investiert man in diese Strategie, so erhält man also zu Beginn den positiven Betrag $G_t - S_t$ und an T ebenfalls einen positiven Betrag, so dass dies eine Arbitragestrategie ist. Es folgt, dass $C_t > S_t$ nicht gelten kann.

(ii) „$C_t \geq S_t - KB(t,T)$“. Zunächst ist $C_t \geq 0$. Wir nehmen an, dass
$C_t < S_t - KB(t,T)$. Betrachte folgende Arbitragestrategie:

[1] Eine genaue Definition von Arbitrage wird in Definitionen 2.2.1 und 3.2.1 gegeben.

Portfolio	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
• Kaufe Call	C_t	$C_T = 0$	$C_T = S_T - K$
• Kaufe K Nullkuponanleihen	$KB(t,T)$	K	K
• Verkaufe Aktie	$-S_t$	$-S_T$	$-S_T$
	< 0	$K - S_T \geq 0$	$S_T - K + K - S_T = 0$

Diese Strategie offeriert also zur Zeit t einen positiven Betrag und zur Zeit T keine Ausgabe, also einen Arbitragegewinn. Es folgt die Behauptung. ■

Es ist interessant, sich die untere Grenze genauer anzusehen. „$\geq$“ heißt, dass man den Call-Preis in zwei Teile zerlegen kann:

$$C_t = S_t - KB(t,T) + x, \quad x \geq 0.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass x gerade durch die Prämie für einen Put gegeben ist.

Lemma 1.3.5 (Put-Call Parität)**.** *Für den Preis des europäischen Calls (C_t) und Puts (P_t) auf eine Aktie S ohne Dividendenzahlung gilt folgender Zusammenhang:*

$$C_t = S_t - KB(t,T) + P_t. \tag{1.8}$$

Beweis: Die Idee ist, zwei Portfolios zu bestimmen, die in T den gleichen Wert haben und im Zeitintervall (t,T) keine Auszahlungen haben. Dann müssen sie auch zu jedem anderen Zeitpunkt den gleichen Wert haben.

Portfolio 1	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
• Kaufe Call	C_t	$C_T = 0$	$C_T = S_T - K$
• Kaufe K Nullkuponanleihen	$KB(t,T)$	K	K
	$C_t + KB(t,T)$	$\max\{S_T, K\}$	

Portfolio 2			
• Kaufe Put	P_t	$P_T = K - S_T$	$P_T = 0$
• Kaufe Aktie	S_t	S_T	S_T
	$P_t + S_t$	$\max\{S_T, K\}$	

■

Es ist überraschend, welche weitreichende Konsequenzen das einfache Lemma 1.3.4 hat: Neben europäischen Optionen gibt es auch amerikanische Optionen. Insbesondere bei einem Call gestaltet sich die Beziehung besonders einfach. Mit C_t^A, P_t^A bezeichnen wir den Wert eines amerikanischen Calls bzw. Puts.

Satz 1.3.6 (Satz von Merton)**.** *Unter der Voraussetzung, dass die Aktie S in $[t,T]$ keine Dividenden zahlt, ist es nie optimal, einen amerikanischen Call vorzeitig auszuüben. Insbesondere gilt also*

$$C_t^A = C_t. \tag{1.9}$$

Beweis: Zunächst einmal ist klar, dass $C_t^A \geq C_t$. Angenommen, der amerikanische Call wird vorzeitig ausgeübt, etwa zum Zeitpunkt $\tau < T$. Der Inhaber erhält $(S_\tau - K)^+$. Allerdings gilt für den Wert der europäischen Option $C_\tau \geq S_\tau - KB(\tau, T)$; C_τ ist damit strikt größer als der Ausübungswert des amerikanischen Calls, und wir erhalten

$$C_\tau^A \geq C_\tau \geq S_\tau - KB(\tau, T) \geq S_\tau - K.$$

Also hat der Ausübende weniger Geld erhalten, als sein Call zu dieser Zeit am Markt wert war. Demnach lohnt es sich nicht, ihn vorzeitig auszuüben. ■

Im wesentlichen beruht diese Aussage darauf, dass der Ausübungswert K weiter verzinst wird, und man bei vorzeitigem Ausüben diesen Zins verlieren würde.
Bemerkenswerterweise ist das beim amerikanischen Put genau umgekehrt, so dass sich vorzeitiges Ausüben lohnen kann. Ebenso verhält es sich im Fall, wenn die Aktie eine Dividende zahlt.

Lemma 1.3.7 (Put-Call Relation für amerikanische Optionen)**.** *Für amerikanische Calls und Puts mit Preisen C_t^A bzw. P_t^A mit jeweils identischen Merkmalen (K, T) gilt*

$$S_t - K \leq C_t^A - P_t^A \leq S_t - KB(t, T). \tag{1.10}$$

Beweis: Offensichtlich ist $P_t^A \geq P_t$. Aus der Put-Call Parität für europäische Optionen erhalten wir $C_t - P_t = S_t - KB(t, T)$ und mit Satz 1.3.6

$$C_t^A - P_t^A = C_t - P_t^A \ \leq \ C_t - P_t.$$

Damit folgt die rechte Seite aus Gleichung 1.8. ■

Für die linke Seite zeigen wir $S_t + P_t^A \leq C_t^A + K$. Hierbei ist $C_t^A = C_t$. Wähle eine beliebigen aber festen Zeitpunkt $\tau \in (t, T]$. Für $\tau = T$ erhalten wir Ausübung an Maturität, also das Auszahlungsprofil eines europäischen Puts. In der Handelsstrategie von Portfolio 1 wird man den Betrag K auf ein Bankkonto einzahlen. Dieses Bankkonto wird mit einem risikolosen aber möglicherweise zufälligem Zinssatz verzinst. Der Betrag K hat an einem späteren Zeitpunkt $\tau > t$ einen gestiegenen Wert, den wir mit $K\beta(\tau - t) \geq K$ bezeichnen. Wir betrachten die folgenden beiden Portfolios

Portfolio 1	Wert in t	Wert in $\tau \in (t, T]$
• Kaufe am. Call	$C_t^A = C_t$	$C_\tau^A = C_\tau$
• Zahle K auf Bankkonto	K	$K\beta(\tau - t)$
	$C_t + K$	$C_\tau + K\beta(\tau - t)$

Portfolio 2		
• Kaufe am. Put und übe ihn in τ aus	P_t^A	$(K - S_\tau)^+$
• Kaufe Aktie	S_t	S_τ
	$P_t^A + S_t$	$S_\tau + (K - S_\tau)^+$ $= \max\{S_\tau, K\}$

Für den Wert von Portfolio 1 gilt im Zeitpunkt $\tau \in (t, T]$

$$C_\tau + K\beta(\tau - t) \geq C_\tau + K \geq (S_\tau - KB(\tau, T))^+ + K \geq (S_\tau - K)^+ + K = \max(S_\tau, K).$$

Somit ist der Wert von Portfolio 1 an jedem Ausübungszeitpunkt (inklusive Maturität T) größer oder gleich dem Wert von Portfolio 2 und somit aus Arbitragegründen auch an t. ■

1.3.3 Wertgrenzen für Optionen: Der Fall mit Dividenden

Für eine kurze Laufzeit kann man die Dividenden recht präzise vorhersagen. Nehmen wir also an, der Wert der zukünftig auszuzahlenden Dividenden (bis Maturität) sei bekannt.
Mit D bezeichnen wir die Summe der auf t abdiskontierten Dividendenauszahlungen. Man erhält unmittelbar

$$C_t \geq S_t - D - KB(t, T), \tag{1.11}$$

indem man die vorigen Ergebnisse auf $S_t - D$ anwendet, genauer auf ein Portfolio

$$S_t - \sum_{i=1}^{n} D_i B(t, T_i),$$

wobei n Dividenden der Höhe D_i an T_i bis zur Maturität T ausgezahlt werden.

Für den amerikanischen Call wird es mitunter optimal sein, an Dividendenzeitpunkten auszuüben, vgl. Hull, Kapitel 10. Betrachten wir eine mögliche Ausübung an einem Dividendenzeitpunkt T_i. Ausüben wird man nur, falls $S_{T_i} > K$. Genau genommen, wird man direkt vor der Dividendenzahlung ausüben. Den Wert der Aktie bezeichnet man dann mit S_{T_i-}, wobei diese Notation noch einmal explizit auf den linken Grenzwert hinweist, $S_{T_i-} := \lim_{t \uparrow T_i} S_t$. Die Auszahlung durch Ausüben ist dann gerade

$$S(T_{i-}) - K.$$

Allerdings gilt ebenso für den Preis des Calls an T_i, also nach Auszahlung der Dividende:

$$C^A_{T_i} \geq C_{T_i} \geq S_{T_i-} - D_i - KB(T_i, T).$$

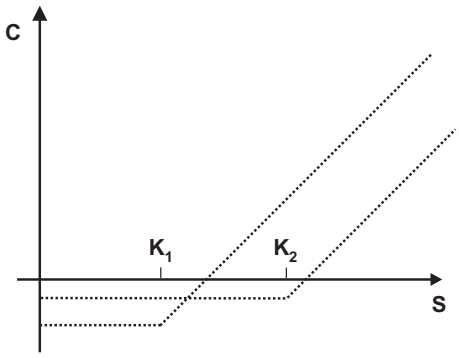
Ist der Preis höher als die Auszahlung durch Ausüben, so ist es natürlich nicht optimal auszuüben. D.h. es ist nicht optimal auszuüben, falls

$$D_i \leq K\Big(1 - B(T_i, T)\Big).$$

Es lässt sich zeigen, dass im Fall $D_i > K\big(1 - B(T_i, T)\big)$ Ausüben immer optimal ist.

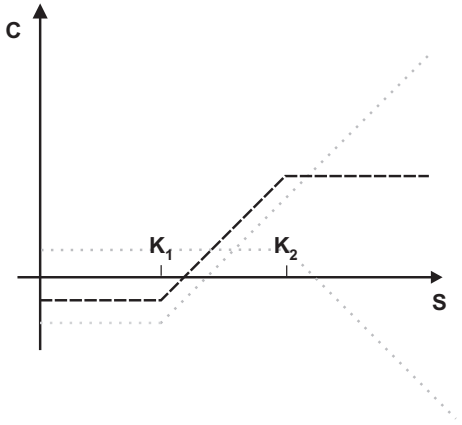
1.3.4 Optionsstrategien

Die Gewinnprofile (Payoff − Prämie) einfacher europäischer Calls sehen wie folgt aus:



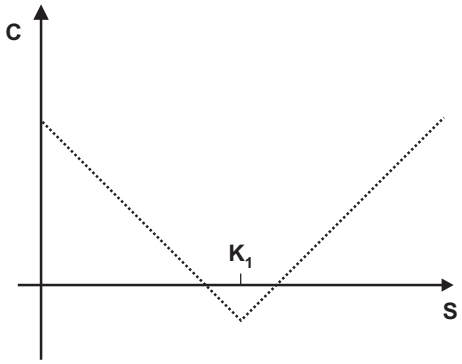
Aus den Plain-Vanilla Optionen lassen sich verschiedene Payoff-Profile generieren. Insgesamt gibt es fünf Grundtypen konstruiert aus ± Call ± Put ± Asset.

1. Bull-Call-Spread: Calls mit unterschiedlichen Strikes $K_1 < K_2$.
   Payoff: + Call(K_1) − Call(K_2):

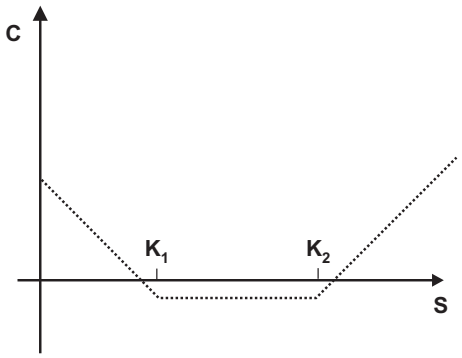


2. Bear-Call-Spread: vertausche K_1 und K_2.

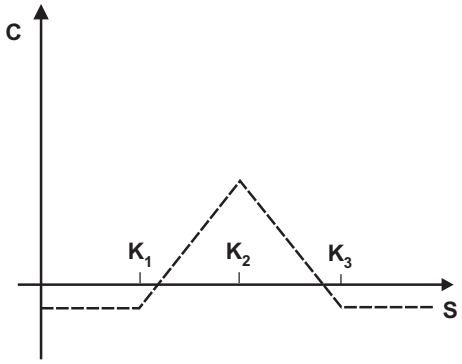
3. Straddle: Call und Put mit gleichem Strike



4. Strangle



5. Butterfly: + Call(K_1) − 2 Call(K_2) + Call(K_3):



Kapitel 2

Einperiodenmodelle zur Wertpapierbewertung

2.1 Das Modell

In diesem Kapitel betrachten wir ein Einperiodenmodell unter Unsicherheit mit den folgenden Eigenschaften.

MODELLSTRUKTUR. Es gibt 2 Zeitpunkte, $t = 0$ und $t = T$. Handel von Wertpapieren findet in $t = 0$ statt; die Auszahlung der Wertpapiere erfolgt in T. Im Zeitpunkt T sind K Zustände der Welt mit positiver Wahrscheinlichkeit möglich; diese sind durch die Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ beschrieben. Da $|\Omega| = K < \infty$, können wir eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^K$ durch die Festlegung $X_k := X(\omega_k)$, $1 \leq k \leq K$, identifizieren; diese Identifikation wird im folgenden häufig implizit verwendet.

WERTPAPIERE. Die einzige Möglichkeit Geld von $t = 0$ nach T zu transferieren, ist der Handel von Wertpapieren. Es werden N Wertpapiere $a_1, \ldots, a_N$ gehandelt. Ein Wertpapier ist vollständig beschrieben durch seine Auszahlung in den Zuständen $\omega_k \in \Omega$ im Zeitpunkt T. Die Auszahlung des Wertpapiers n in Zustand k wird mit $a_n(\omega_k)$ bezeichnet. Wir definieren eine $K \times N$-Matrix D (die Auszahlungsmatrix) durch $d_{kn} := a_n(\omega_k)$, also

$$D = \begin{pmatrix} a_1(\omega_1) & \cdots & a_N(\omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(\omega_K) & \cdots & a_N(\omega_K) \end{pmatrix}.$$

PORTFOLIOS. In diesem Modell entscheidet ein Investor also zur Zeit $t = 0$, wieviel er von welchem Wertpaper kaufen bzw. verkaufen will. Dabei sind sogenannte Leerverkäufe (short-selling) erlaubt, d.h. ein Marktteilnehmer hat die Möglichkeit in Aktien negative Positionen zu beziehen. Ebenso kann er beliebig stückeln und beispielsweise 1/3 Aktien kaufen. Formal beschreiben wir die Position eines Investors durch einen Vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)' \in \mathbb{R}^N$. Dabei gibt für $1 \leq n \leq N$ die Zahl θ_n an, wieviele Wertpapiere a_n im Portfolio gehalten werden. Falls $\theta_n < 0$ spricht man von einer *short-position* in Wertpapier n, falls $\theta_n > 0$ entsprechend von einer *long position*.

Erreichbare Auszahlungen und Marktvollständigkeit. Die *Auszahlung* eines Portfolios $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)'$ im Zustand ω_k ist offensichtlich gegeben durch

$$W_k := \sum_{n=1}^{N} \theta_n a_n(\omega_k) = \sum_{n=1}^{N} d_{kn}\theta_n = (D\boldsymbol{\theta})_k.$$

In Vektornotation lässt sich die Auszahlung des Portfolios $\boldsymbol{\theta}$ also durch die Zufallsvariable $\boldsymbol{W} = (W_1, \ldots, W_K)'$ mit $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ beschreiben.

Definition 2.1.1. 1. Unter einer *bedingten Auszahlung (contingent claim)* verstehen wir eine Zufallsvariable $\boldsymbol{W} = (W_1, \ldots, W_k)'$; W_k beschreibt die Auszahlung von $\boldsymbol{W}$ in Zustand ω_k.

2. Eine bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W}$ heisst *erreichbar* (gegeben D), falls ein Portfolio $\boldsymbol{\theta}$ existiert mit $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$. Das Portfolio $\boldsymbol{\theta}$ heisst *Replikationsportfolio* für $\boldsymbol{W}$.

Beispiel 2.1.2. Wir betrachten ein Modell mit zwei Wertpapieren, Nullkuponanleihe und Aktie. Die Zustände der Welt seien beschrieben durch die verschiedenen Werte, die der Aktienkurs in T annehmen kann.

Fall 1. Es gebe 2 Möglichkeiten für den Aktienkurs in T, $S_T = 180$ und $S_T = 120$. Die Auszahlungsmatrix ist somit gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 120 \end{pmatrix},$$

wobei die erste Spalte der Auszahlung der Nullkuponanleihe und die zweite Spalte der Auszahlung der Aktie entspricht. Betrachten wir nun eine Call Option auf S mit Ausübungspreis $K = 150$ und Fälligkeit T. Der zugehörige Auszahlungsvektor ist $\boldsymbol{W} = (30, 0)'$. Die Auszahlung des Calls ist erreichbar, falls das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ eine Lösung hat, d.h. falls es θ_1, θ_2 gibt, die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} \theta_1 & + & 180\theta_2 & = & 30 \\ \theta_1 & + & 120\theta_2 & = & 0 \end{array}$$

erfüllen. Dies ist der Fall für $\theta_1 = -60,\ \theta_2 = 1/2$, d.h. ein Replikationsportfolio ist durch eine short-position von 60 Nullkuponanleihen und eine long-position von 0.5 Aktien gegeben.

Fall 2. Es gebe drei Möglichkeiten für den Wert von S_T: $S_T = 180$, $S_T = 120$, und zusätzlich $S_T = 150$. Die Auszahlungsmatrix hat in diesem Fall folgende Form:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 150 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}.$$

Unser Call hat somit in T die Auszahlung $\boldsymbol{W} = (30, 0, 0)'$. Man sieht unmittelbar, dass das Gleichungssystem $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ in diesem Fall keine Lösung hat. Wir erhalten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\theta_1 + 180\theta_2 = 30 \tag{2.1}$$
$$\theta_1 + 150\theta_2 = 0 \tag{2.2}$$
$$\theta_1 + 120\theta_2 = 0. \tag{2.3}$$

Aus Fall 1) wissen wir, dass (2.1) und (2.3) auf $\theta_1 = -60, \theta_2 = 1/2$ führen. Setzen wir diese Werte in (2.2) ein, so erhalten wir $-60 + 1/2 \cdot 150 = -60 + 75 \neq 0$. Der Call ist also nicht erreichbar.

Obiges Beispiel motiviert die folgende

Definition 2.1.3. Ein Modell mit Auszahlungsmatrix $D \in \mathbb{R}^{K \times N}$ heisst *vollständig*, falls jede bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^K$ erreichbar ist.

Bemerkung: Da der Rang einer Matrix gleich der Dimension des Bildraums ist, ist ein Modell mit Auszahlungsmatrix D offensichtlich genau dann vollständig, wenn der Rang von D gleich K ist. Insbesondere muss also $N \geq K$ gelten, d.h. es gibt mindestens so viele handelbare Wertpapiere wie Zustände der Welt.

2.2 Arbitragefreiheit und Zustandspreise/ Martingalwahrscheinlichkeiten

2.2.1 Arbitragefreiheit und Zustandspreise

Möchte man in $t = 0$ Wertpapiere kaufen, so hat man dafür einen gewissen Preis zu zahlen. Die Preise für die N Wertpapiere seien gegeben durch den Vektor $\boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_N)' \in \mathbb{R}^N$. So ist S_n der Preis, den man im Zeitpunkt $t = 0$ zahlen muss, um in T die Wertschrift a_n zu erlangen. Der Preis eines Portfolios $\boldsymbol{\theta}$ bzw. sein Wert im Zeitpunkt $t = 0$ ist somit offensichtlich gegeben durch

$$V_0^{\boldsymbol{\theta}} := \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} = \langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\theta} \rangle = \sum_{n=1}^{N} S_n \theta_n \,. \tag{2.4}$$

Bei gegebener Modellstruktur ist ein Markt durch ein Paar $(D, \boldsymbol{S})$, D die Auszahlungsmatrix und $\boldsymbol{S}$ der Preisvektor in $t = 0$, beschrieben. Wir wollen zunächst die Frage untersuchen, welche Preissysteme bei gegebener Auszahlungsmatrix D keine Arbitrage zulassen, da nur solche Preise mit einem Gleichgewicht auf dem Kapitalmarkt vereinbar sind.

Definition 2.2.1 (Arbitrage im Einperiodenmodell). Wir betrachten den Markt $(D, \boldsymbol{S})$. Eine Arbitragemöglichkeit ist ein Portfolio $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)'$ mit

(i) $V_0^{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} \leq 0$, d.h. in $t = 0$ ist der Preis des Portfolios ≤ 0.

(ii) $\sum_{n=1}^{N} a_n(\omega_k)\theta_n \geq 0$, $1 \leq k \leq K$, d.h. die Auszahlung von $\boldsymbol{\theta}$ ist in jedem Zustand $\omega_k \in \Omega$ nicht-negativ.

(iii) Es gilt $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} < 0$, oder es gibt ein k mit $\sum_{n=1}^{N} a_n(\omega_k)\theta_n > 0$.

Ein Markt (D, S) heisst entsprechend arbitragefrei, wenn es keine Arbitragemöglichkeit gibt. Unser Ziel ist die Charakterisierung von arbitragefreien Preissystemen zu gegebener Auszahlungsmatrix D. Dazu brauchen wir folgende Definition.

Definition 2.2.2. Ein Vektor von *Zustandspreisen* für den durch eine Auszahlungsmatrix D und ein Preisvektor $\boldsymbol{S}$ gegebenen Markt ist ein Vektor $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^K$ mit $\psi_k > 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, K\}$, der die Gleichung $\boldsymbol{S} = D'\boldsymbol{\psi}$ löst, wobei D' die transponierte Matrix von D bezeichnet.

Betrachte eine erreichbare bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$. Ein Kandidat für den Preis dieser Auszahlung in $t = 0$ ist der Preis $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$ des Replikationsportfolios $\boldsymbol{\theta}$. Das folgende Lemma zeigt, dass sich dieser Preis auch mit Hilfe von Zustandspreisen ausdrücken lässt.

Lemma 2.2.3. *Gegeben sei ein Vektor $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^K$ mit $\psi_k > 0$ für alle k. Dann ist $\boldsymbol{\psi}$ genau dann ein Vektor von Zustandspreisen, wenn für jede erreichbare bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ die Identität $\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$ gilt.*

Beweis: Es gilt wegen $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ nach Definition der transponierten Abbildung

$$\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{\psi}, D\boldsymbol{\theta} \rangle = \langle D'\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta} \rangle \,. \tag{2.5}$$

Falls $\boldsymbol{\psi}$ ein Vektor von Zustandspreisen ist, so gilt $\boldsymbol{S} = D'\boldsymbol{\psi}$, und die linke Seite von (2.5) ist gleich $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$. Gilt umgekehrt die Identität $\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$, so folgt aus (2.5), dass $\langle D'\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta} \rangle = \langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\theta} \rangle$ für alle $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N$, und somit die Identität $\boldsymbol{S} = D'\boldsymbol{\psi}$. ■

Interpretation der Zustandspreise. Betrachte einen erweiterten Markt, auf dem neben den Wertpapieren $a_1, \ldots, a_N$ auch noch fiktive Wertpapiere mit Auszahlung $\boldsymbol{e}_k$, $1 \leq k \leq K$, gehandelt werden, wobei $\boldsymbol{e}_k$ den k-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}_K$ bezeichnet. Diese fiktiven Wertpapiere sind auch unter dem Namen *Arrow-Debreu Securities* bekannt. Für ein ökonomisch sinnvolles Preissystem $\boldsymbol{\psi}$ für die Arrow-Debreu securities müssen die folgenden beiden Bedingungen gelten.

(i) Positivität, d.h. $\psi_k > 0$ für alle $1 \leq k \leq K$.

(ii) Kompatibilität mit den Preisen der gehandelten Wertpapiere. Einerseits lässt sich jede Auszahlung $\boldsymbol{W}$ als Linearkombination der Arrow-Debreu securities darstellen; dies führt auf den Preis $\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W}$ für $\boldsymbol{W}$. Für eine erreichbare Auszahlung $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ ist alternativ der Preis durch $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$ gegeben. Kompatibilität bedeutet somit, dass für alle erreichbaren Auszahlungen die Identität $\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$ gelten muss.

Gemäß Lemma 2.2.3 ist ein Vektor von Zustandspreisen also gerade ein ökonomisch sinnvolles Preissystem für die Arrow-Debreu securities.

Satz 2.2.4 (1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung)**.** *Ein durch Auszahlungsmatrix D und Preis $\boldsymbol{S}$ gegebener Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn mindestens ein Vektor von Zustandspreisen existiert.*

Wir beweisen in dem Kapitel über Mehrperiodenmodelle einen deutlich allgemeineren Satz und verweisen an dieser Stelle darauf.

Beispiel: Wir betrachten einen Wertpapiermarkt mit 3 Wertpapieren und 2 Zuständen. Es gelte:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{S}' = (7, 3, 5).$$

Wir wollen zeigen, dass der durch $(D, \boldsymbol{S})$ gegebene Wertpapiermarkt arbitragefrei ist. Nach dem ersten Fundamentalsatz müssen wir zeigen, dass es einen Vektor von Zustandspreisen $\boldsymbol{\psi}$ gibt mit $\psi_1, \psi_2 > 0$. Die Gleichung für $\boldsymbol{\psi}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 6 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

bzw. bereits etwas umgeformt:

$$\begin{aligned} 4\psi_1 + 12\psi_2 &= 7 && (2.6) \\ 6\psi_1 + 3\psi_2 &= 3 && (2.7) \\ 8\psi_2 &= 4. && (2.8) \end{aligned}$$

Gleichung (2.8) und (2.7) liefern uns das Resultat $\psi_2 = 1/2$, $\psi_1 = 1/4$. Man überprüft sofort, dass diese Zahlen auch Gleichung (2.6) erfüllen. Der Zustandspreisvektor ist somit gleich $(1/4, 1/2)'$.

Bewertung von erreichbaren bedingten Auszahlungen. Die folgende Proposition zeigt, dass auf einem arbitragefreien Markt der Preis einer erreichbaren bedingten Auszahlung $\boldsymbol{W} = D \cdot \boldsymbol{\theta}$ durch den Preis $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$ eines Replikationsportfolios $\boldsymbol{\theta}$ gegeben ist.

Proposition 2.2.5. *Betrachte einen arbitragefreien Markt $(D, \boldsymbol{S})$ und eine erreichbare Auszahlung, $\boldsymbol{W} = D \cdot \boldsymbol{\theta}$. Dann ist der Markt mit Auszahlungsmatrix $\tilde{D} = (D, \boldsymbol{W}) \in \mathbb{R}^{K \times (N+1)}$ und Preis $\tilde{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{S}, S_{N+1})' \in \mathbb{R}^{N+1}$ arbitragefrei $\Leftrightarrow$ $S_{N+1} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$.*

Beweis: "⇒." Falls $S_{N+1} > \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$, so besteht eine Arbitragemöglichkeit durch Kauf des Replikationsportfolios und Verkauf von $\boldsymbol{W}$, d.h der Vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N, -1)'$ ist eine Arbitragemöglichkeit. Falls $S_{N+1} < \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$, so ist der Vektor $\boldsymbol{\theta} = (-\theta_1, \ldots, -\theta_N, 1)'$ eine Arbitragemöglichkeit.

"⇐." Sei $\boldsymbol{\psi}$ ein Zustandspreisvektor für den Markt $(D, \boldsymbol{S})$. Man rechnet sofort nach, dass $\boldsymbol{\psi}$ auch die Gleichung $\tilde{\boldsymbol{S}} = \tilde{D}'\boldsymbol{\psi}$ löst und somit auch ein Zustandspreisvektor für den erweiterten Markt ist. Hieraus folgt unmittelbar die behauptete Arbitragefreiheit. ■

2.2.2 Zustandspreise und risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße

Wir wollen eine probabilistische Interpretation der Zustandspreise geben, weil sich diese Interpretation besser auf Mehrperiodenmodelle übertragen lässt. Hierzu müssen wir zunächst Zinsen in unserem Modell einführen.

Gegeben sei ein Markt mit Auszahlungsmatrix D und Preissystem $\boldsymbol{S}$. Ein Portfolio $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ mit Auszahlung $D\bar{\boldsymbol{\theta}} = (1, \ldots, 1)'$ heisst *risikofreies Portfolio*. Offensichtlich entspricht die Auszahlung eines risikofreien Portfolios gerade dem payoff der Nullkuponanleihe $B(\cdot, T)$. Existiert ein derartiges Portfolio, so ist der Preis der Nullkuponanleihe in $t = 0$ durch $B(0, T) = \boldsymbol{S}'\bar{\boldsymbol{\theta}}$ gegeben, und wir können den *Einperiodenzinssatz* r durch die Gleichung $\boldsymbol{S}'\bar{\boldsymbol{\theta}} = 1/(1 + r)$ definieren.

Definition 2.2.6. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ mit $q_k := Q(\{\omega_k\}) > 0$, $k = 1, \ldots, K$, heisst *risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß* für den Markt $(D, \boldsymbol{S})$, falls für jede erreichbare Auszahlung $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ gilt, dass

$$\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{1+r}\sum_{k=1}^{K} q_k W_k =: \frac{1}{1+r} E^Q(\boldsymbol{W}). \tag{2.9}$$

Die Bewertungsregel (2.9) heisst *risk-neutral pricing rule*.

Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß wird oft auch als *Martingalmaß* bezeichnet, da die abdiskontierten Auszahlungen der gehandelten Wertpapiere unter Q Martingale sind (siehe Anhang). Die Wahrscheinlichkeiten q_k sind durch die Marktstruktur (D und $\boldsymbol{S}$) festgelegt und sind typischerweise verschieden von den realen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände ω_k. Der Name *risikoneutrale Wahrscheinlichkeit* kommt daher, dass diese Wahrscheinlichkeiten gerade den Erwartungen eines risikoneutralen Investors entsprechen, die mit dem Preissystem $\boldsymbol{S}$ in Einklang stehen. Die risk-neutral pricing rule erlaubt es, Preise erreichbarer Auszahlungen analog zu aktuariellen (versicherungstechnischen) Bewertungsregeln als Erwartungswert der abdiskontierten Endauszahlung zu berechnen. Im Unterschied zu einer aktuariellen Bewertung wird in der risk-neutral pricing rule aber mit einem risikoneutralen Maß Q und nicht mit den realen Eintrittswahrscheinlichkeiten gearbeitet.

Proposition 2.2.7. *Gegeben ein Markt $(D, \boldsymbol{S})$ mit risikofreiem Portfolio $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ und zugehörigem Einperiodenzinssatz r.*

1. *Sei $\boldsymbol{\psi}$ ein Vektor von Zustandspreisen zu unserem Markt. Dann ist das durch $q_k := \psi_k / \sum_{k=1}^{K} \psi_k$ definierte Maß Q ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß.*
2. *Sei Q ein risikoneutrales Maß. Dann ist der durch $\psi_k = q_k/(1 + r)$ definierte Vektor $\boldsymbol{\psi}$ ein Zustandspreisvektor.*

Die Proposition zeigt, dass sich Zustandspreise und risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße eineindeutig entsprechen. Insbesondere ist also nach dem 1. Fundamentalsatz die Arbitragefreiheit eines Marktes äquivalent zur Existenz eines risikoneutralen Maßes.

Beweis: 1) Das W-maß Q ist offensichtlich wohldefiniert; darüber hinaus gilt $q_k > 0$ für alle k. Wir müssen die risk-neutral pricing rule (2.9) überprüfen. Sei $\boldsymbol{W} = D\boldsymbol{\theta}$ eine erreichbare Auszahlung. Dann gilt für deren Preis $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$ nach Lemma 2.2.3:

$$\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} = \sum_{k=1}^{K} \psi_k W_k = \left(\sum_{k=1}^{K} \psi_k\right) \sum_{k=1}^{K} q_k W_k. \tag{2.10}$$

Nun ist $\sum_{k=1}^{K} \psi_k$ der Preis des risikoneutralen Portfolios mit Auszahlung $(1, \ldots, 1)'$. Also gilt $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} = (1+r)^{-1} \sum_{k=1}^{K} q_k W_k$.

2) Wir müssen zeigen, dass $\boldsymbol{\psi}$ die Gleichung $\boldsymbol{S} = D'\boldsymbol{\psi}$ löst. Nach der risk-neutral pricing rule (2.9) und der Definition von $\boldsymbol{\psi}$ gilt für jede erreichbare Auszahlung die Gleichung

$$\boldsymbol{S}'\theta = \frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^{K} q_k W_k = \boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W},$$

so dass die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2.2.3 folgt. ■

2.3 Eindeutigkeit von Zustandspreisen und Marktvollständigkeit

Gemäß Definition 2.1.3 heisst ein Wertpapiermarkt mit Auszahlungsmatrix D vollständig, wenn jede bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W}$ erreichbar ist. Im folgenden Satz geben wir eine Charakterisierung vollständiger Märkte.

Satz 2.3.1 (2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung)**.** *Sei $(D, \boldsymbol{S})$ ein arbitragefreier Markt. Dann gilt: Es gibt **genau** einen Vektor von Zustandspreisen genau dann, wenn der Markt vollständig ist.*

Aus Proposition 2.2.7 folgt unmittelbar, dass Marktvollständigkeit auch äquivalent ist zur Eindeutigkeit des risikoneutralen Maßes.

Wir verweisen wieder auf den Beweis im Falle von Mehrperiodenmodellen.

Bemerkung: Der Beweis von Satz 2.3.1 stützt sich im wesentlichen auf die aus der linearen Algebra bekannte Identität $\ker D' = (\operatorname{im} D)^{\perp}$.

Beispiel 2.3.2. *Trinomialmodell.* Wie in Beispiel 2.1.2 betrachten wir einen Markt mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 150 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}, \text{ und } \mathbf{S} = (1, 150)'.$$

Wir wissen bereits, dass der Markt unvollständig ist. Im folgenden bestimmen wir alle Zustandspreise/Martingalmaße. Die Bedingung $\boldsymbol{S} = D'\boldsymbol{\psi}$ führt auf das LGS

$$\begin{aligned} 180\psi_1 + 150\psi_2 + 120\psi_3 &= 150 \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 &= 1, \quad \psi_i > 0. \end{aligned}$$

Das LGS führt auf Lösungen der Form $\psi_1 = \psi_3, \psi_2 = 1 - 2\psi_3$, die Bedingung $\psi_i > 0$ also auf Zustandspreise der Form $\boldsymbol{\psi} = \left\{(\alpha, 1-2\alpha, \alpha), \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2.4 Unvollständige Märkte

Wir betrachten im folgenden stets einen unvollständigen arbitragefreien Markt $D, \boldsymbol{S}$. Außerdem nehmen wir der Einfachheit halber an, dass das erste Wertpapier eine Nullkuponanleihe ist, d. h. $a_1(\omega_s) = 1 \; \forall s = 1, \dots K$. Für eine nicht erreichbare bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W}$ (etwa eine Option) stellen sich zwei Fragen.

- Wie kann ein Verkäufer das mit dem Verkauf von $\boldsymbol{W}$ verbundene Risiko durch Wahl eines geeigneten Portfolios $\boldsymbol{\theta}$ zumindest reduzieren? Man spricht von *Absicherung* eines Derivats (englisch *hedging*).
- Können für nicht erreichbare Auszahlungen zumindest Preisschranken angegeben werden?

2.4.1 Preisschranken für nicht erreichbare bedingte Auszahlungen

Wir beginnen mit der zweiten Fragestellung. Hier haben wir folgendes allgemeines Ergebnis.

Proposition 2.4.1. *Betrachte einen arbitragefreien Markt $(D, \boldsymbol{S})$ und eine bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W}$. Nimm an, dass $\boldsymbol{W}$ nicht erreichbar ist. Bezeichne mit $\tilde{\Psi}$ die Menge aller Zustandspreise. Dann ist jeder Preis im offenen Intervall*

$$\left(\inf\{\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} : \boldsymbol{\psi} \in \tilde{\Psi}\}, \sup\{\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} : \boldsymbol{\psi} \in \tilde{\Psi}\}\right) \tag{2.11}$$

vereinbar mit Abwesenheit von Arbitrage.

Beweis. Falls $\boldsymbol{W}$ nicht erreichbar ist, so zeigt man analog zum Beweis des 2. Fundamentalsatzes, dass $\inf_{\boldsymbol{\psi}\in\tilde{\Psi}} \boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} < \sup_{\boldsymbol{\psi}\in\tilde{\Psi}} \boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W}$. Sei nun ein Preis $\tilde{S}$ für $\boldsymbol{W}$ aus dem offenen Intervall (2.11) gegeben. Aufgrund der Konvexität der Menge $\tilde{\Psi}$ aller Zustandspreise folgt unmittelbar die Existenz von $\boldsymbol{\psi} \in \tilde{\Psi}$ mit $\tilde{S} = \boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W}$ und somit die Behauptung. ■

Es gibt eine Reihe von sinnvollen und interessanten Ansätzen zur Bestimmung von Absicherungsstrategien, durch die das mit dem Verkauf einer bedingten Auszahlung verbundene Risiko vermindert werden kann. Im folgenden werden wir zwei derartige Ansätze diskutieren, Superreplikation und das sogenannte Quadratic Hedging

2.4.2 Superreplikation

In der folgenden Definition verallgemeinern wir den Begriff der Erreichbarkeit.

Definition 2.4.2. Gegeben sei eine bedingte Auszahlung $\boldsymbol{W}$. Ein Superreplikationsportfolio für $\boldsymbol{W}$ ist ein Portfolio $\boldsymbol{\theta}$ mit $D\boldsymbol{\theta} \geq W$.

Der Preis des Superreplikationsportfolios ist durch $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$ gegeben. Der Verkäufer einer bedingten Auszahlung $\boldsymbol{W}$, beispielsweise einer Option, kann das mit dem Verkauf der Option verbundene Risiko vollständig eliminieren, indem er einer Superreplikationsstrategie $\boldsymbol{\theta}$ folgt; die dadurch entstehenden Kosten in $t = 0$ sind durch den Wert $V_0^{\boldsymbol{\theta}}$ des Portfolios gegeben. Superreplikationsstrategien führen allerdings unter Umständen zu sehr hohen Kosten für die Risikoelimination.

Im Kontext von Beispiel 2.3.2 ist eine mögliche Superreplikation für die Auszahlung $\boldsymbol{W} = (30, 0, 0)'$ (Call-Option auf die Aktie mit $K = 150$) durch $\boldsymbol{\theta} = (-120, 1)$ mit Preis $-120+150 = 30$ gegeben. Es gilt

$$D\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kostenminimale Superreplikationsportfolios. Die Bestimmung eines kostenminimierenden Superreplikationsportfolios führt unmittelbar auf folgendes lineares Optimierungsproblem:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{S}'\boldsymbol{\theta} \quad \text{bzgl.} \quad D\boldsymbol{\theta} \geq \boldsymbol{W} \tag{PP}$$

Wir werden im folgenden die Dualitätstheorie der linearen Optimierung auf dieses Problem anwenden. Insbesondere wird sich zeigen, dass das duale Problem auf eine intuitive ökonomische Charakterisierung der Superreplikationskosten führt. Das duale Problem zu (PP) hat die Form

$$\max_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} \text{ bezügl. } D'\boldsymbol{\psi} = \mathbf{S},\ \boldsymbol{\psi} \geq 0; \tag{DP}$$

siehe etwa Kapitel 4 von Bertsimas & Tsitsiklis (1997). Beachte dass jeder Vektor von Zustandspreisen ein Element des zulässigen Bereichs von (DP) ist. Wir haben folgende Abschätzung für Lösungen von (DP) und (PP).

Lemma 2.4.3 (schwache Dualität)**.** *Sei $\boldsymbol{\theta}$ zulässig in (PP) und $\boldsymbol{\psi}$ zulässig in (DP). Dann gilt $\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} \leq \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$.*

Beweis: Da $\boldsymbol{\psi} \geq 0$ und $D\boldsymbol{\theta} \geq \boldsymbol{W}$ folgt $\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} \leq \boldsymbol{\psi}'D\boldsymbol{\theta} = (D'\boldsymbol{\psi})'\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}$. ■

Tatsächlich gilt aber viel mehr.

Satz 2.4.4 (Dualitätssatz)**.** *Falls für (PP) oder für (DP) eine Lösung existiert, so sind die beiden linearen Programme lösbar, und die Optimalwerte der Zielfunktion stimmen überein. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die zulässigen Bereiche von (PP) und von (DP) beide nicht leer sind.*

Wenden wir den Dualitätsatz nun auf unser Problem an, so erhalten wir

Lemma 2.4.5. *In einem arbitragefreien Markt haben (DP) und (PP) eine Lösung, und die Werte der Zielfunktion stimmen überein.*

Beweis: Der zulässige Bereich von (DP) ist nicht leer, da das Modell arbitragefrei ist und somit Zustandspreise existieren. Der zulässige Bereich von (PP) ist nicht leer, da $\boldsymbol{D}_1 = (1, \ldots, 1)'$ und somit $\lambda \boldsymbol{D}_1 \geq \boldsymbol{W}$ für λ genügend groß. Also haben (PP) und (DP) eine Lösung, und die Zielfunktionswerte stimmen nach dem Dualitätssatz überein. ■

Für die ökonomische Interpretation von Lemma 2.2.3 brauchen wir noch

Lemma 2.4.6. *Sei $(D, \boldsymbol{S})$ ein arbitragefreier Markt. Bezeichne mit $\tilde{\Psi}$ die Menge aller Zustandspreise. Dann gilt* $\max\{\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\psi} \geq 0, \boldsymbol{S} = D'\boldsymbol{\psi}\} = \sup\{\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W} : \boldsymbol{\psi} \in \tilde{\Psi}\}$.

Beweis: Sei $\boldsymbol{\psi}^*$ eine Lösung des (DP), $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ ein strikt positiver Vektor von Zustandspreisen. Definiere $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon := (1-\varepsilon)\boldsymbol{\psi}^* + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\psi}}$. Dann ist $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon > 0$, und es gilt $D'\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon = (1-\varepsilon)D'\boldsymbol{\psi}^* + \varepsilon D'\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{S}$, d.h. es gilt $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon \in \tilde{\Psi}$. Die Behauptung folgt, da $\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon' W = (\boldsymbol{\psi}^*)'W$. ■

Zusammenfassend haben wir also

Satz 2.4.7. *Sei (D, $\boldsymbol{S}$) ein arbitragefreier Markt. Dann gibt es zu jeder Auszahlung $\boldsymbol{W}$ eine kostenminimierende Superreplikationsstrategie $\boldsymbol{\theta}^*$. Die Superreplikationskosten sind gegeben durch*

$$\sup\left\{\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\psi} \in \tilde{\Psi}\right\} = \sup\left\{\frac{1}{1+r}E^Q(\boldsymbol{W}),\ Q \text{ risikoneutrales Maß}\right\}.$$

Bemerkung. Die minimalen Superreplikationskosten entsprechen also gerade der oberen Preisschranke aus Proposition 2.4.1. Man kann analog zeigen, dass die untere Preisschranke aus Proposition 2.4.1 gerade dem Negativen der Superreplikationskosten für die Auszahlung $-\boldsymbol{W}$ entspricht.

In Anwendungen ist das Optimierungsproblem (DP) oft leichter lösbar. Mit Hilfe des folgenden Resultats kann bei bekannter Lösung $\boldsymbol{\psi}$ des (DP) ein kostenminimierendes Superreplikationsportfolio berechnet werden.

Proposition 2.4.8 (Komplementärer Schlupf)**.** *Sei $\boldsymbol{\theta}$ zulässig in (PP) und $\boldsymbol{\psi}$ zulässig in (DP). Dann sind äquivalent*

1. *Es gilt $\boldsymbol{\psi}'(\boldsymbol{W} - D\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{0}$.*
2. *$\boldsymbol{\psi}$ ist eine Lösung von (DP) und $\boldsymbol{\theta}$ eine Lösung von (PP).*

Beweis: (i)⇒(ii). Gilt (i) so sieht man unmittelbar, dass in der schwachen Dualität (Lemma 2.4.3) Gleichheit gelten muss, woraus (ii) unmittelbar folgt.

(ii) ⇒i). Ist $\boldsymbol{\psi}$ eine Lösung von DP und $\boldsymbol{\theta}$ eine Lösung von (PP), so stimmen nach dem Dualitätssatz die Werte der Zielfunktion beider Optimierungsprobleme überein; Inspektion des Beweises von Lemma 2.4.3 zeigt unmittelbar, dass (i) gelten muss. ■

Sei nun $\boldsymbol{\psi}$ eine nicht-degenerierte Lösung des (DP), d.h. N Komponenten $1 \le k_1 < \cdots < k_N \le K$ von $\boldsymbol{\psi}$ seien echt positiv (dies ist der typische Fall). Nach der Proposition vom komplementären Schlupf müssen also für ein kostenminimales Portfolio $\boldsymbol{\theta}$ die N Gleichungen

$$(D\boldsymbol{\theta})_{k_n} = W_{k_n} \quad 1 \le n \le N, \tag{2.12}$$

erfüllt sein. Das lineare Gleichungssystem (2.12) besteht aus N Gleichungen und N Unbekannten; es kann zur Berechnung eines optimalen Portfolios verwendet werden.

Beispiel:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 150 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W} = (30, 0, 0)', \quad \boldsymbol{S} = (1, 150)'.$$

Die Menge der Zustandspreise wurden bereits in Beispiel 2.3.2 bestimmt. Wir bestimmen deshalb unmittelbar eine Lösung des (DP) und erhalten

$$\sup\{\boldsymbol{\psi}'\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\psi} > 0, \boldsymbol{S} = D'\boldsymbol{\psi}\} = \sup\left\{\alpha 30 + (1-2\alpha)0 + 0,\ \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}30 = 15.$$

Der zugehörige degenerierte Vektor von Zustandspreisen ist $\boldsymbol{\psi}^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})'$. Zur Bestimmung des kostenminimalen Superreplikationsportfolios $\boldsymbol{\theta}^*$ verwenden wir das Gleichungssystem (2.12); da $\psi_2^* = 0$, besteht dieses System aus den 2 Gleichungen

$$\theta_1^* + 180\theta_2^* = 30, \text{ und } \theta_1^* + 120\theta_2^* = 0;$$

die Lösung ist durch $\theta_1 = -60, \theta_2 = \frac{1}{2}$ gegeben. Die zugehörigen kostenminimalen Superreplikationskosten sind $-60 + \frac{1}{2}150 = 15$ und stimmen - wie in Satz 2.4.7 gezeigt - mit der oberen Preisschranke für $\boldsymbol{W}$ aus Proposition 2.4.1 überein.

2.4.3 Quadratic Hedging

Wie wir gerade gesehen haben, führt der Versuch, mittels Superreplikation das mit dem Verkauf einer bedingten Auszahlung verbundene Risiko vollständig zu eliminieren, oft zu prohibitiv hohen Superreplikationskosten. Alternativ kann man versuchen, zu gegebenem $\boldsymbol{W}$ Absicherungsstrategien zu finden, die den sogenannten *Hedgefehler* $\boldsymbol{W} - D\boldsymbol{\theta}$ in einem geeigneten Sinn minimieren. Beim *Quadratic-Hedging* Ansatz wird die Größe des Hedgefehlers durch das sogenannte *mittlere quadratische Risiko*, definiert als L^2-Norm von $\boldsymbol{W} - D\boldsymbol{\theta}$ bezüglich des realen Maßes P, gemessen. Mit $p_k = P(\{\omega_k\})$ ist das mittlere quadratische Risiko gegeben durch

$$E^P((\boldsymbol{W} - D\boldsymbol{\theta})^2) := \sum_{k=1}^{K} p_k (W_k - (D\boldsymbol{\theta})_k)\,.$$

Die Bestimmung einer Absicherungsstrategie $\boldsymbol{\theta}$, die das mittlere quadratische Risiko minimiert, führt also auf das folgende quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{K} p_k (W_k - (D\boldsymbol{\theta})_k)^2\,. \tag{2.13}$$

Quadratische Absicherungsstrategien führen auf quadratische Optimierungsprobleme und sind daher analytisch relativ leicht handhabbar. Aus ökonomischer Sicht ist die "Symmetrie" in der Zielfunktion in (2.13) allerdings problematisch, da eine "overperformance" des Absicherungsportfolios ($W_k < (D\boldsymbol{\theta})_k$) aus Verkäufersicht weniger problematisch ist als eine "underperformance" ($W_k > (D\boldsymbol{\theta})_k$).

Da es sich bei (2.13) um ein quadratisches Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen handelt, sind die Bedingungen erster Ordnung notwendig und hinreichend für ein Optimum. Ableiten von (2.13) liefert die folgenden N Gleichungen zur Bestimmung eines optimalen Portfolios $\boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{R}^N$:

$$\sum_{k=1}^{K} p_k (W_k - (D\boldsymbol{\theta}^*)_k) d_{kn} = 0, \quad 1 \le n \le N\,. \tag{2.14}$$

Aus (2.14) lassen sich eine Reihe interessanter Folgerungen ziehen:

- Wir können (2.14) alternativ in der Form $E^P((\boldsymbol{W} - D\boldsymbol{\theta}^*)\boldsymbol{a}_n) = 0$ schreiben, $\boldsymbol{a}_n$ die zufällige Auszahlung von Wertpapier n, so dass der Hedgefehler $\boldsymbol{W} - D\boldsymbol{\theta}^*$ der optimalen Strategie senkrecht im $L^2(\Omega, P)$-Sinn auf der Menge der erreichbaren Auszahlungen steht.
- Für $n = 1$ erhalten wir wegen $a_1(\omega_k) = 1$ für alle k, dass $E^P(\boldsymbol{W} - D\boldsymbol{\theta}^*) = 0$, d.h. der mittlere Hedgefehler verschwindet.
- Das Gleichungssystem (2.14) ist äquivalent zu

  $$\sum_{k=1}^{K} p_k W_k = \sum_{k=1}^{K} p_k d_{kn} \sum_{l=1}^{N} d_{kl}\theta_l^*, \quad 1 \le n \le N.$$

  Da die rechte Seite in der Form $\sum_{l=1}^{N} a_{nl}\theta_l^*$ mit $a_{nl} = \sum_{k=1}^{K} p_k d_{kn} d_{kl}$ geschrieben werden kann, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für $\boldsymbol{\theta}^*$. Man sieht leicht, dass dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, falls die Auszahlungsmatrix Rang N hat und falls $p_k > 0$ für alle k.

Weitere Information zu quadratic-hedging Ansätzen findet man etwa in Kapitel 10 von Föllmer & Schied (2004).

2.5 Einführung in die Portfoliooptimierung

2.5.1 Problemstellung

Gegeben sei ein Markt $(D, \boldsymbol{S})$ und ein Investor mit Vermögen V_0. Dieser möchte ein optimales Portfolio $\boldsymbol{\theta}^*$ mit heutigem ($t = 0$) Preis $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}^* = V_0$ so bestimmen, dass der Nutzen des Investors aus der Auszahlung $\boldsymbol{W}^* = D\boldsymbol{\theta}^*$ des Portfolios maximal ist. Dabei bestimmt der Investor den Nutzen einer zufälligen Auszahlung gemäß dem sogenannten Erwartungsnutzenkriterium.

Das Erwartungsnutzenkriterium. Wir nehmen an, dass der Investor (subjektive) Eintrittswahrscheinlichkeiten über die Zustände ω_k gebildet hat; diese seien mit $P = (p_1, \dots, p_K)$ bezeichnet und es gelte $p_k = P(\{\omega_k\}) > 0$ für alle k. Beachte, dass P kein Martingalmaß sein muss. Außerdem sei eine sogenannte *Nutzenfunktion* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben; u sei glatt, streng monoton wachsend und konkav, d.h. es gelte $u' > 0$, und $u'' < 0$. Unter dem Erwartungsnutzenkriterium ist der Nutzen einer zufälligen Auszahlung $\boldsymbol{W}$ gegeben durch

$$U(\boldsymbol{W}) := E^P\left(u(\boldsymbol{W})\right) = \sum_{k=1}^{K} p_k u(W_k). \tag{2.15}$$

Bemerkungen.

- Typische Nutzenfunktionen sind $u(x) = 1 - \exp(-\alpha x),\ \alpha > 0$, $\alpha^{-1}x^\alpha,\ \alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$, $\alpha^{-1}(x^\alpha - 1),\ \alpha < 1$, wobei letzere Nutzenfunktion für $\alpha \to 0$ gegen $u(x) = \log(x)$ konvergiert.
- Die Annahme $u' > 0$ impliziert, dass für zwei Auszahlungen $\boldsymbol{W}_1 \leq \boldsymbol{W}_2$ die Ungleichung $U(\boldsymbol{W}_1) \leq U(\boldsymbol{W}_2)$ gilt.
- Die Annahme $u'' < 0$ modelliert *Risikoaversion* des Investors. Speziell gilt wegen der Konkavität von u für jede zufällige Auszahlung $\boldsymbol{W}$ nach der Jensenschen Ungleichung

  $$U(\boldsymbol{W}) = E^P\left(u(\boldsymbol{W})\right) \leq u\left(E^P(\boldsymbol{W})\right) = U(E^P(\boldsymbol{W})\mathbf{1}),$$

  wobei $\mathbf{1} = (1, \dots 1)' \in \mathbb{R}^K$. Unter dem Erwartungsnutzenkriterium zieht ein Investor also die sichere Auszahlung $E^P(\boldsymbol{W})\mathbf{1}$ der risikobehafteten Auszahlung $\boldsymbol{W}$ vor. Beachte, dass beide Auszahlungen den gleichen Erwartungswert haben.

Das Portfoliooptimierungsproblem. Mit diesen Begriffen können wir nun das Optimierungsproblem unseres Investors wie folgt formulieren: Bestimme ein Portfolio $\boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{R}^N$ mit $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}^* = V_0$ (die sogenannte *Budgetbedingung*), so dass

$$U(D\boldsymbol{\theta}^*) = \max\{U(D\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \text{ Portfolio mit } \boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} = V_0\}. \tag{2.16}$$

Zur Lösung dieses Problems machen wir die folgenden Annahmen.

- Das Modell $(D, \boldsymbol{S})$ ist arbitragefrei (andernfalls hat das Problem (2.16) keine Lösung, da ein Investor einen unendlich großen Nutzen erzielen kann).
- Wertpapier N ist risikofrei, d. h. $d_{kN} = 1\ \forall k = 1, \dots K$; S_N ist dann gleich dem Preis der Nullkuponanleihe $B(0, T)$ und es gilt $S_N = 1/(1+r)$. Diese Annahme dient im wesentlichen der Vereinfachung der Darstellung.

2.5.2 Direkte Lösung mittels Bedingungen erster Ordnung

Um die Budgetbedingung $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} = V_0$ zu berücksichtigen, schreiben wir das Problem wie folgt um. Wir betrachten nur die $N-1$ riskanten Wertpapiere $a_2, \dots, a_N$ und definieren die zugehörige Auszahlungsmatrix durch $\tilde{D}_{k,n} = D_{k,n}$, $n = 2, \dots, N$; der zugehörige Preis- und Portfoliovektor seien durch $\tilde{\boldsymbol{S}} := (S_2, \dots, S_N)'$ und $\tilde{\boldsymbol{\theta}} := (\theta_2, \dots, \theta_N)$ definiert.

Ein Portfolio $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathbb{R}^N$ ist genau dann zulässig (d.h. erfüllt die Budgetbedingung), wenn $\theta_1 = (1+r)(V_0 - \tilde{\boldsymbol{S}}'\tilde{\boldsymbol{\theta}})$. Wir können (2.16) also umschreiben zu

$$\max_{\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{N-1}} U\left((1+r)(V_0 - \tilde{\boldsymbol{S}}'\tilde{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{1} + \tilde{D}\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right). \tag{2.17}$$

Das Problem (2.17) ist nunmehr ein Optimierungsproblem **ohne** Nebenbedingungen; eine Lösung muss also die Bedingungen erster Ordnung erfüllen. Ökonomisch gesehen berücksichtigen wir die Budgetbedingung $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} = V_0$ durch Anpassen der Position im risikofreien Wertpapier N.

Lösen von (2.17) **mittels Bedingungen erster Ordnung.** Definiere die zu $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{N-1}$ gehörige Auszahlung durch $\boldsymbol{W}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) := (1+r)(V_0 - \tilde{\boldsymbol{S}}'\tilde{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{1} + \tilde{D}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$. Für $n = 2, \dots, N$ muss für das optimale Portfolio $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*$ gelten, dass

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_n} U(\boldsymbol{W}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*)) = 0\,, \quad n = 2, \dots, N.$$

(Bedingungen erster Ordnung). Nach Definition von U, $\tilde{D}$ und $\tilde{S}$ folgt also aus den Bedingungen erster Ordnung, dass

$$0 = \sum_{k=1}^{K} p_k u'(\boldsymbol{W}_k(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*))\left(-(1+r)S_n + D_{kn}\right), \quad n = 2, \dots N. \tag{2.18}$$

Man kann nun versuchen, das Gleichungssystem (2.18) zu lösen; die Konkavität von u garantiert dann, dass eine Lösung $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*$ ein Optimum ist. Dies ist allerdings im Allgemeinen rechnerisch schwierig. Interessanter ist die ökonomische Interpretation von (2.18). Umschreiben von (2.18) liefert die folgenden $N-1$ Gleichungen:

$$\frac{1}{1+r} E^P\left(u'(\boldsymbol{W}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*))\boldsymbol{a}_n\right) = S_n E^P\left(u'(\boldsymbol{W}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*))\right), n = 2, \dots, N,$$

wobei $\boldsymbol{a}_n$ den Auszahlungsvektor des n-ten Wertpapiers bezeichnet. Nach Umstellen erhalten wir die Gleichung

$$S_n = \frac{1}{1+r} E^P\left(\frac{u'(\boldsymbol{W}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*))}{E_P\left(u'(\boldsymbol{W}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*))\right)}\,\boldsymbol{a}_n\right), \quad n = 2, \dots, N. \tag{2.19}$$

Für $n = N$ gilt (2.19) per Definition, da $\boldsymbol{a}_n = \mathbf{1}$. Durch Vergleich mit der risk-neutral pricing rule (2.9) erhalten wir

Proposition 2.5.1. *Sei $\boldsymbol{W}^* = D\boldsymbol{\theta}^*$ die Auszahlung eines optimalen Portfolios. Dann ist durch die Festlegung $q_k := p_k u'(\boldsymbol{W}_k^*)/E_P\left(u'(\boldsymbol{W}_k^*)\right)$ ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß $\boldsymbol{Q} = (q_1, \dots, q_K)$ gegeben.*

2.5.3 Der Martingalansatz.

Die Lösung des Optimierungsproblems über die Bedingungen erster Ordnung ist im Allgemeinen rechnerisch aufwendig. Der Martingalansatz ist eine Alternative, die zumindest in vollständigen Märkten einfacher ist. Wir machen deshalb die folgende

Annahme. Der Markt $(D, \boldsymbol{S})$ sei vollständig; das eindeutig bestimmte risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß sei mit $Q = (q_1, \ldots, q_K)$ bezeichnet.

Idee. In einem vollständigen Markt ist jede Auszahlung $\boldsymbol{W}$ mit $E^Q(\boldsymbol{W}) \leq (1+r)V_0$ replizierbar; die Replikationskosten erfüllen die Ungleichung $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta} \leq V_0$. Wir zerlegen das Portfoliooptimierungsproblem daher in die folgenden zwei Teilprobleme.

- Problem 1. Bestimme das optimale Endvermögen $\boldsymbol{W}^*$ als Lösung des folgenden Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen:

$$\max\left\{E^P\left(u(\boldsymbol{W})\right) : \boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^K, E^Q(\boldsymbol{W}) = (1+r)V_0\right\}. \tag{2.20}$$

- Problem 2. Bestimme zu optimalem $\boldsymbol{W}^*$ das optimale Portfolio $\boldsymbol{\theta}^*$ als Lösung der Gleichung $\boldsymbol{W}^* = D\boldsymbol{\theta}^*$.

In einem vollständigen Markt hat Problem 2 immer eine Lösung und die Bedingung $E^Q(\boldsymbol{W}^*) = (1+r)V_0$ garantiert, dass $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{\theta}^* = V_0$. Wir konzentrieren uns also auf Problem 1.

Das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen (2.20) lässt sich mit der *Lagrange Methode* lösen, denn die Abbildung $\boldsymbol{W} \mapsto U(\boldsymbol{W}) = E^P\left(u(\boldsymbol{W})\right)$ ist aufgrund der Konkavität von u konkav, und die Nebenbedingung $E^Q(\boldsymbol{W}) = (1+r)V_0$ ist linear in $\boldsymbol{W}$. Damit sind nach dem Kuhn-Tucker Theorem äquivalent

1. $\boldsymbol{W}^* \in \mathbb{R}^K$ löst das Problem (2.20),
2. $\exists \lambda^* > 0$ mit $\boldsymbol{W}^* = \max\{U(\boldsymbol{W}) - \lambda^*(E^Q(\boldsymbol{W}) - (1+r)V_0) : \boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^K\}$ und es gilt $E^Q(\boldsymbol{W}^*) = (1+r)V_0$.

Wir zeigen hier nur die Richtung (ii)⇒(i), da dies für unsere Zwecke ausreichend ist. Sei $\boldsymbol{W}^*$ eine Lösung von (ii) und sei $\boldsymbol{W}$ eine weitere Auszahlung mit $E^Q(\boldsymbol{W}) = (1+r)V_0$. Dann gilt

$$U(\boldsymbol{W}^*) - U(\boldsymbol{W}) = U(\boldsymbol{W}^*) - \lambda^*(E^Q(\boldsymbol{W}^*) - (1+r)V_0) - \left(U(\boldsymbol{W}) - \lambda^*(E^Q(\boldsymbol{W}) - (1+r)V_0)\right),$$

und dieser Ausdruck ist nichtnegativ, da $\boldsymbol{W}^*$ eine Lösung von (ii) ist.

Wir bestimmen nun ein Paar $\boldsymbol{W}^*, \lambda^*$ das Bedingung (ii) erfüllt. Zunächst lösen wir für beliebiges $\lambda > 0$ das folgende Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen:

$$\max_{\boldsymbol{W}\in\mathbb{R}^K}\{U(\boldsymbol{W}) - \lambda E^Q(\boldsymbol{W})\} = \max_{\boldsymbol{W}\in\mathbb{R}^K}\left\{\sum_{k=1}^K p_k\left(u(W_k) - \lambda\frac{q_k}{p_k}W_k\right)\right\}. \tag{2.21}$$

Die Bedingungen erster Ordnung (Ableiten nach W_k) zeigen, dass für $k = 1, \ldots, K$ die Gleichung $u'(W_k^*) = \lambda q_k/p_k$ gelten muss. Definiere nun die Funktion $I : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ als Inverse der streng monoton fallenden Funktion $x \mapsto u'(x)$, d.h. $u'(I(x)) = x$; I existiert, da u' streng monoton fallend, und I ist ebenfalls streng monoton fallend. Aus den Bedingungen erster Ordnung folgt also für die Lösung $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}^*(\lambda)$ von (2.21)

$$W_k^*(\lambda) = I\left(\lambda\frac{q_k}{p_k}\right), \quad k = 1, \ldots, K. \tag{2.22}$$

Zur Bestimmung des Paars $\boldsymbol{W}^*, \lambda^*$ aus (ii) (und somit zur Lösung von Problem 1) wählen wir λ^* so, dass für $\boldsymbol{W}^*(\lambda)$ aus (2.22) gilt, dass $E^Q\left(\boldsymbol{W}(\lambda^*)\right) = (1+r)V_0$; dieses Problem ist lösbar, da mit I auch W_k^* fallend in λ für alle k.

Beispiel (Exponentielle Nutzenfunktion). Wir betrachten die Erwartungsnutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-x}$. Für diese Funktion gilt $-u''(x)/u'(x) = 1$, unabhängig von x. Die Maßzahl $-u''(x)/u'(x)$ wird oft als Maß der Risikoaversion eines Investors interpretiert; u hat also konstante Risikoaversion unabhängig von x.

Wir erhalten aus $u'(x) = \exp(-x)$, dass $I(x) = -\ln x$. Damit erhalten wir für $\boldsymbol{W}^*(\lambda)$ in (2.22)

$$W_k^*(\lambda) = -\ln\left(\lambda \frac{q_k}{p_k}\right) = -\ln\lambda - \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right), \quad k = 1, \ldots, K, \tag{2.23}$$

bzw. kompakter $\boldsymbol{W}^* = -\ln\lambda - \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right)$. Der Parameter λ^* wird durch die Gleichung

$$(1+r)V_0 = E^Q\left(-\ln(\lambda^* \frac{dQ}{dP})\right) = -\ln\lambda^* - E^Q\left(\ln\frac{dQ}{dP}\right)$$

bestimmt, so dass $\lambda^* = \exp\left(-(1+r)V_0 - E^Q(\ln\frac{dQ}{dP})\right)$. Damit erhalten wir für das optimale Endvermögen $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}^*(\lambda^*)$ mittels (2.23)

$$W_k^* = (1+r)V_0 + E^Q\left(\ln\frac{dQ}{dP}\right) - \ln\frac{q_k}{p_k}, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{2.24}$$

Bemerkung:

1. $E^Q(\ln\frac{dQ}{dP})$ ist die relative Entropie von Q und P, ein Maß für den Abstand der beiden Maße.
2. Das optimale Vermögen $\boldsymbol{W}^*$ in (2.23) hängt nur durch die additive Konstante $(1+r)V_0$ vom Anfangsvermögen V_0 ab; dies reflektiert die speziellen Eigenschaften der exponentiellen Nutzenfunktion u.

Kapitel 3

Mehrperiodenmodelle

3.1 Modell und grundlegende Begriffe

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $|\Omega| = K < \infty$ und $P(\{\omega_k\}) > 0$ für alle $1 \leq k \leq K$. Wir betrachten ein Modell mit einer endlichen Anzahl von Handelszeitpunkten $t = 0, 1, \ldots, N$. Außerdem sei eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\ldots,N}$ gegeben; wie üblich beschreibt $\mathcal{F}_t$ die Information, die einem Investor im Zeitpunkt $t \in \{0, 1, \ldots, N\}$ zur Verfügung steht. Wir nehmen zusätzlich an, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ-Algebra ist und dass $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Wertpapiere. Es werden $d+1$ Wertpapiere gehandelt; den Preisprozess bezeichnen wir mit $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S}_t)_{t=0,1,\ldots,N} = (S_{t,0}, S_{t,1}, \ldots S_{t,d})_{t=0,1,\ldots,N}$, wobei $S_{t,i}$ bzw. $S_{t,i}(\omega)$ den Preis von Wertpapier $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ im Zeitpunkt t bezeichnet; manchmal verwenden wir auch die Schreibweise $S_i(t)$ bzw. $S_i(t, \omega)$. Die Preisprozesse seien an die Filtration $\mathbb{F}$ adaptiert. Wertpapier 0 wird als sogenanntes *Numéraire* verwendet; wir nehmen an, dass $S_{t,0}(\omega) > 0 \; \forall \; t \in \{0, 1, \ldots, N\}, \; \omega \in \Omega$, und dass $S_0(0) = 1$. Häufig ist S_0 deterministisch oder zumindest previsibel; dies ist aber nicht notwendig. Zusammenfassend bezeichnen wir unser Marktmodell mit

$$\mathcal{M} := \{(\Omega, \mathcal{F}, P), \mathbb{F}, \boldsymbol{S}\}. \tag{3.1}$$

Handelsstrategien. Eine zulässige Handelsstrategie oder Portfoliostrategie ist ein $(d+1)$-dimensionaler *previsibler* stochastischer Prozess

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_t)_{t=1,\ldots,n} = \big(\theta_{t,0}, \theta_{t,1}, \ldots, \theta_{t,d}\big)'_{t=1,\ldots,N}.$$

Hierbei bezeichnet $\theta_{t,i}(\omega)$ die Menge von Wertpapier i, die ein Investor zum Zeitpunkt $t-1$ im Zustand ω kauft und im Zeitraum $(t-1, t]$ in seinem Portfolio hält. Die Previsibilität von $\boldsymbol{\theta}$ bedeutet, dass die Investitionsentscheidung im Zeitpunkt $t-1$, also die Wahl von $\boldsymbol{\theta}_t$, nur auf Informationen aus $\mathcal{F}_{t-1}$ basieren darf; somit sind Phänomene wie „Insiderinformationen“ ausgeschlossen. Den *Wert der Strategie* $\boldsymbol{\theta}$ im Zeitpunkt t definiert man durch

$$V_t^{\boldsymbol{\theta}} := \boldsymbol{\theta}_t' \boldsymbol{S}_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_{t,i} S_{t_i}.$$

Die Selbstfinanzierungsbedingung. Eine Handelsstrategie $\boldsymbol{\theta}$ heißt *selbstfinanzierend*, falls sie zulässig ist und für $t = 1, \dots, N-1$ gilt, dass

$$V_t^{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=0}^{d} \theta_{t,i} S_{t,i} \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{d} \theta_{t+1,i} S_{t,i}. \tag{3.2}$$

Intuitiv bedeutet (3.2), dass dem Portfolio zu keinem der Zeitpunkte $t = 1, \dots, N-1$ Geldmittel zugeführt oder entnommen werden. Wir haben die folgende Charakterisierung von selbstfinanzierenden Handelsstrategien.

Lemma 3.1.1. *Eine zulässige Handelsstrategie $\boldsymbol{\theta}$ ist selbstfinanzierend genau dann, wenn für alle $t = 1, \dots, N$ gilt, dass*

$$V_t^{\boldsymbol{\theta}} = V_0^{\boldsymbol{\theta}} + (\theta, \boldsymbol{S})_t := V_0^{\boldsymbol{\theta}} + \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} \theta_{s,i} \Big(S_i(s) - S_i(s-1) \Big). \tag{3.3}$$

Der Ausdruck $G_t^{\boldsymbol{\theta}} := (\theta, \boldsymbol{S})_t = \sum_{s=1}^{t} \boldsymbol{\theta}'_s \Delta \boldsymbol{S}_s$ wird oft als *Handelsgewinn* der selbstfinanzierenden Strategie $\boldsymbol{\theta}$ bezeichnet; der Wert einer selbstfinanzierenden Strategie im Zeitpunkt t ist also die Summe aus Anfangsinvestition und Handelsgewinn. Wir verwenden die Notation $(\theta, \boldsymbol{S})$ für das stochastische Integral von θ bzgl. $\boldsymbol{S}$, was im zeitlich diskreten Modell schlicht eine Riemannsumme ist, vergleiche auch die Definition im Anhang.

Beweis: Nach der Definition von $V^{\boldsymbol{\theta}}$ ist

$$V_{t+1}^{\boldsymbol{\theta}} - V_t^{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}'_{t+1} \boldsymbol{S}_{t+1} - \boldsymbol{\theta}'_t \boldsymbol{S}_t. \tag{3.4}$$

Die Strategie $\boldsymbol{\theta}$ ist selbstfinanzierend genau dann, wenn $\boldsymbol{\theta}'_t \boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{\theta}'_{t+1} \boldsymbol{S}_t$. Zunächst folgt daraus, dass

$$V_{t+1}^{\boldsymbol{\theta}} - V_t^{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}'_{t+1} \Delta \boldsymbol{S}_{t+1} \tag{3.5}$$

gilt, also (3.2). Umgekehrt folgt aus (3.2) die Darstellung (3.5) und mit Gleichung (3.4), dass $\boldsymbol{\theta}$ selbstfinanzierend ist. ■

Diskontierte Größen. Der Übergang zu diskontierten Größen vereinfacht die Handhabung des Modells wesentlich. Definiere den diskontierten Preisprozess durch $\tilde{S}_t := \Big(1, \frac{S_{t,1}}{S_{t,0}}, \dots, \frac{S_{t,d}}{S_{t,0}}\Big)'$,den diskontierten Wertprozess einer Strategie $\boldsymbol{\theta}$ durch $\tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} := \frac{V_t^{\boldsymbol{\theta}}}{S_{t,0}} = \boldsymbol{\theta}'_t \tilde{\boldsymbol{S}}_t$ und schließlich $\tilde{G}_t^{\boldsymbol{\theta}} := (\boldsymbol{\theta}, \tilde{\boldsymbol{S}})$. Analog zu Lemma 3.1.1 zeigt man

Lemma 3.1.2. *Eine Strategie $\boldsymbol{\theta}$ ist selbstfinanzierend genau dann, wenn*

$$\tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{V}_0^{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{G}_t^{\boldsymbol{\theta}}.$$

Bemerkung. Da $\tilde{S}_{t,0} \equiv 1$, ist $\tilde{G}^{\boldsymbol{\theta}}$ unabhängig von $(\theta_{t,0})_{t=1,\dots,N}$. Daher liegt die Wahl von V_0 und $(\theta_{t,1}, \dots, \theta_{t,d})'_{t=1,\dots N}$ eindeutig die Position in Wertpapier 0 fest, falls $\boldsymbol{\theta}$ selbstfinanzierend ist. Umgekehrt kann bei gegebenem V_0 jede Strategie $(\theta_{t,1}, \dots, \theta_{t,d})$ in den Wertpapieren $1, \dots, d$ durch Wahl von θ_0 auf eindeutige Weise zu einer selbstfinanzierenden Strategie ergänzt werden. Für das so bestimmte θ_0 gilt

$$\theta_{t,0} = \tilde{V}_0 + \tilde{G}_t^{\boldsymbol{\theta}} - \sum_{i=1}^{d} \theta_{t,i} \tilde{S}_{t,i} \; ;$$

man sieht leicht, dass $\theta_{t,0}$ tatsächlich previsibel ist.

3.2 Arbitragefreiheit und Martingalmaße

Definition 3.2.1. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\boldsymbol{\theta}$ ist eine Arbitragemöglichkeit, falls $V_0^{\boldsymbol{\theta}} \leq 0, V_N^{\boldsymbol{\theta}} \geq 0$ und mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i.) $V_0^{\boldsymbol{\theta}} < 0$ oder

(ii.) $P\big(V_N^{\boldsymbol{\theta}} > 0\big) > 0$.

Ein Marktmodell $\mathcal{M}$ heißt arbitragefrei bzw. erfüllt die No-Arbitrage-Bedingung (NA), falls keine Arbitragemöglichkeiten existieren. Es gibt zwei Gründe, warum ein gutes Finanzmarktmodell arbitragefrei sein sollte:

- In der Realität existieren Arbitragemöglichkeiten meist nur für kurze Zeit.
- Wird ein nicht-arbitragefreies Modell zur Bewertung von Derivaten verwendet, so besteht die Gefahr, dass der Nutzer des Modells inkonsistente Preise stellt und dadurch selber „ausarbitriert“ wird.

Definition 3.2.2. Gegeben sei ein Finanzmarktmodell $\mathcal{M}$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt *äquivalentes Martingalmaß*, falls

(i.) Q ist äquivalent zu P, d.h. für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$.

(ii.) Der diskontierte Preisprozess aller gehandelten Wertpapiere ist ein *Martingal* bzgl. Q, d.h. es gilt für alle $t = 0, 1, \ldots N-1$ und $i = 0, 1, \ldots d$:

$$E^Q\big(\tilde{S}_{t+1,i} \mid \mathcal{F}_t\big) = \tilde{S}_{t,i}. \tag{3.6}$$

Ein äquivalentes Martingalmaß nennt man oft auch risikoneutrales Maß. Für Q ist äquivalent zu P schreiben wir kurz: $Q \sim P$.

Lemma 3.2.3. *Sei Q ein äquivalentes Martingalmaß für das Marktmodell $\mathcal{M}$. Dann ist der diskontierte Wertprozess $\tilde{V}^{\boldsymbol{\theta}}$ einer zulässigen, selbstfinanzierenden Strategie $\boldsymbol{\theta}$ ein Martingal.*

Beweis: Da $\boldsymbol{\theta}$ selbstfinanzierend ist, folgt aus Lemma 3.1.2

$$\tilde{V}_{t+1}^{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\theta}'_{t+1} \Delta \tilde{\boldsymbol{S}}_{t+1}.$$

Da $\boldsymbol{\theta}$ previsibel ist, ist $\boldsymbol{\theta}_{t+1}$ $\mathcal{F}_t$-messbar. Damit folgt

$$\begin{aligned} E^Q\big(\tilde{V}_{t+1}^{\boldsymbol{\theta}} \mid \mathcal{F}_t\big) &= \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} + \sum_{i=1}^{d} E^Q\Big(\theta_{t+1,i}(\tilde{S}_{t+1,i} - \tilde{S}_{t,i}) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big) \\ &= \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} + \sum_{i=1}^{d} \theta_{t+1,i} E^Q\big(\tilde{S}_{t+1,i} - \tilde{S}_{t,i} \mid \mathcal{F}_t\big). \end{aligned}$$

Da Q ein Martingalmaß ist, folgt $E^Q\big(\tilde{S}_{t+1,i} - \tilde{S}_{t,i} \mid \mathcal{F}_t\big) = 0$ und somit $E^Q\big(\tilde{V}_{t+1}^{\boldsymbol{\theta}} \mid \mathcal{F}_t\big) = \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}}$. ■

Proposition 3.2.4. *Existiert für ein Finanzmarktmodell $\mathcal{M}$ ein äquivalentes Martingalmaß Q, so ist $\mathcal{M}$ arbitragefrei.*

Beweis: Es reicht, zu zeigen, dass es keine Strategie $\boldsymbol{\theta}$ mit $V_0^{\boldsymbol{\theta}} \leq 0$, $V_N^{\boldsymbol{\theta}} \geq 0$ und $P(V_N^{\boldsymbol{\theta}} > 0) > 0$ geben kann. Dazu zeigen wir, dass für jede Strategie $\boldsymbol{\theta}$ mit $V_N^{\boldsymbol{\theta}} \geq 0,\ P(V_N^{\boldsymbol{\theta}} > 0) > 0$ auch $V_0^{\boldsymbol{\theta}} > 0$ gelten muss.

Da $\text{sign}(V_N^{\boldsymbol{\theta}}) = \text{sign}(\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}})$, folgt, dass für jede derartige Strategie auch $\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}} \geq 0$, $P(\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}} > 0) > 0$ gilt; aus $Q \sim P$ ist, folgt $Q(\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}} > 0) > 0$ und somit $E^Q(\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}}) > 0$. Nach Lemma 3.2.3 ist $\tilde{V}^{\boldsymbol{\theta}}$ aber ein Q-Martingal, insbesondere gilt also $V_0^{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{V}_0^{\boldsymbol{\theta}} = E^Q(\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}}) > 0$. ■

Nunmehr wollen wir die Umkehrung von Proposition 3.2.4 beweisen. Hierzu brauchen wir die folgende Charakterisierung der Martingaleigenschaft von $\tilde{S}$.

Lemma 3.2.5. *Der diskontierte Preisprozess $\tilde{S}$ ist genau dann ein Q-Martingal, wenn für jede zulässige, selbstfinanzierende Handelsstrategie gilt, dass $E^Q\left(\tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}}\right) = 0$.*

Beweis. Da $|\Omega| < \infty$, ist $\boldsymbol{\theta}$ stets beschränkt und man erhält die Aussage aus Lemma A.1.11. ■

Proposition 3.2.6. *Falls das Finanzmarktmodell $\mathcal{M}$ arbitragefrei ist, so gibt es mindestens ein äquivalentes Martingalmaß.*

Bemerkung. Zusammengenommen zeigen die Propositionen 3.2.4 und 3.2.6 also gerade, dass die Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells $\mathcal{M}$ äquivalent ist zur Existenz von äquivalenten Martingalmaßen. Dies ist der berühmte erste *Hauptsatz der Wertpapierbewertung.*

Beweis von Proposition 3.2.6:

Definiere

$$P := \left\{X : \Omega \mapsto \mathbb{R} : X(\omega_k) \geq 0,\ 1 \leq k \leq K,\ \text{und}\ \sum_{k=1}^{K} X(\omega_k) = 1\right\}$$

$$M := \left\{\tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}} :\ \boldsymbol{\theta}\ \text{ist selbstfinanzierende Handelsstrategie}\right\}.$$

Wir können P und M mit Teilmengen von $\mathbb{R}^K$ identifizieren, indem wir jede Zufallsvariable $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ durch den Vektor $(\xi(\omega_1), \ldots, \xi(\omega_K))'$ darstellen. Aus (NA) folgt $M \cap P = \emptyset$; sonst existierte eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, $\boldsymbol{\theta}$ mit $\tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}}(\omega_k) > 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, K\}$. Dann ist P eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^K$ und M aufgrund der Linearität der Abbildung $\boldsymbol{\theta} \to \tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^K$. Der Satz von Hahn-Banach[1] liefert nun die Existenz eines linearen Funktionals $F : \mathbb{R}^K \mapsto \mathbb{R}$, so dass $F(m) = 0$ für alle $m \in M$ und $F(p) > 0$ für alle $p \in P$.

Der letzte Schritt besteht nun in der Konstruktion des Maßes Q aus F. Mit $\{e_k : 1 \leq k \leq K\}$ seien die Einheitsvektoren auf $\mathbb{R}^K$ bezeichnet. Dann ist $e_k \in P$ für jedes K, und somit $F(e_k) > 0$. Durch

$$q_k := \frac{F(e_k)}{\sum_{i=1}^{K} F(e_i)}$$

[1] Genau genommen, seine geometrische Version, die man oft auch als Trennungssatz bezeichnet, siehe Werner (2000), Theorem III.2.4 und Theorem III.2.4.5. Wir verwenden eine unmittelbare Folgerung aus dem zweiten Theorem, nämlich dass für einen linearen Unterraum M und einer konvexen, abgeschlossenen Menge P mit $M \cup P = \emptyset$ ein lineares Funktional F existiert, so dass $F(M) = 0$ und $F(P) > 0$. Denn nach dem Theorem existiert für ein $m \in M$ ein lineares Funktional $\tilde{F}$ mit $\tilde{F}(m) < \inf\{\tilde{F}(p) : p \in P\}$; durch $F(x) := \tilde{F}(x) - \tilde{F}(m)$ erhalten wir das gesuchte F.

definiert man also ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q, für welches

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q(\tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}}) &= \sum_{k=1}^K q_k\, \tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}}(\omega_k) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^K F(e_i)} F\Big(\sum_{k=1}^K e_k\, \tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}}(\omega_k)\Big) = 0,\end{aligned}$$

da das Argument auf welches F angewendet wird in M liegt. Damit ist $\tilde{G}_N$ nach Lemma 3.2.5 ein Martingal und somit Q das gesuchte äquivalente Martingalmaß. ■

Die risikoneutrale Bewertungsformel. Wir behandeln nun die Bewertung von bedingten Auszahlungen (contingent claims). Dabei verstehen wir unter einem *contingent claim* mit Fälligkeit $T \in \{1, \dots, N\}$ eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable. Dies können z.B. Derivate sein, deren Auszahlung durch eine Funktion des Kursverlaufs bestimmter Wertpapiere gegeben ist.

Definition 3.2.7. Gegeben sei ein Finanzmarktmodell $\mathcal{M}$.

1.) Ein contingent claim H mit Fälligkeit T heißt *erreichbar*, falls es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\boldsymbol{\theta}$ gibt, so dass $V_T^{\boldsymbol{\theta}} = H$ gilt; dieses $\boldsymbol{\theta}$ nennt man *Replikationsstrategie* für H.

2.) Sei $\mathcal{M}$ arbitragefrei und H ein erreichbarer claim mit Replikationsstrategie $\boldsymbol{\theta}$. Dann ist der faire Preis von H in $t \le T$ durch die Replikationskosten $V_t^{\boldsymbol{\theta}}$ gegeben.

Satz 3.2.8 (risk-neutral pricing)**.** *Gegeben sei ein arbitragefreier Markt $\mathcal{M}$ und ein erreichbarer contingent claim H mit Fälligkeit T. Desweiteren sei Q ein äquivalentes Martingalmaß. Dann ist der Preis von H in $t \le T$ gegeben durch*

$$H_t := S_{t,0}\, E^Q\Big(\frac{H}{S_{T,0}} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big). \tag{3.7}$$

Bemerkung. Gleichung (3.7) ist die risikoneutrale Bewertungsformel (*risk-neutral pricing rule*). Gilt speziell $S_{t,0} = \prod_{s=1}^t (1 + r_s)$ für einen previsiblen Zinsprozess $(r_t)_{t=1,\dots,N}$ mit Werten in $[0, \infty)$, so gilt

$$H_t = E^Q\Big(\prod_{s=t+1}^T \frac{H}{1 + r_s} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big).$$

Beweis von Satz 3.2.8: Sei $\boldsymbol{\theta}$ eine Replikationsstrategie für H. Wir zeigen, dass in $t \le T$ die Identität

$$V_t^{\boldsymbol{\theta}} = S_{t,0}\, E^Q\Big(\frac{H}{S_{T,0}} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big) \tag{3.8}$$

gilt. Setze $\tilde{H} := \frac{H}{S_{T,0}}$. Es gilt $V_T^{\boldsymbol{\theta}} = H$ und somit $\tilde{V}_T^{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{H}$. Wir haben also die Darstellung

$$\tilde{H} = \tilde{V}_T^{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{G}_T^{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{G}_t^{\boldsymbol{\theta}}.$$

Wie in Lemma 3.2.3 gezeigt wurde, ist $\tilde{G}^{\boldsymbol{\theta}}$ ein Q-Martingal. Damit folgt

$$E^Q\big(\tilde{H} \mid \mathcal{F}_t\big) = \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} + E^Q\Big(\tilde{G}_T^{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{G}_t^{\boldsymbol{\theta}} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big) = \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.9}$$

Multiplikation von (3.9) mit $S_{t,0}$ liefert (3.8) und somit die Behauptung. ■

Folgerung.

(i.) Sei $\mathcal{M}$ arbitragefrei und seien $\boldsymbol{\theta}$ und $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ Replikationsstrategien für den claim H. Dann gilt für jedes $t \leq T$ $V_t^{\boldsymbol{\theta}} = V_t^{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$, da die rechte Seite von (3.8) nicht von $\boldsymbol{\theta}$ abhängt; insbesondere ist der faire Preis eines claims also wohldefiniert.

(ii.) Sei H ein erreichbarer claim, und seien Q und $\bar{Q}$ zwei Martingalmaße. Dann gilt für alle $t \leq T$

$$E^Q\Big(\frac{H}{S_{T,0}} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big) = E^{\bar{Q}}\Big(\frac{H}{S_{T,0}} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big), \tag{3.10}$$

da die linke Seite von (3.8) unabhängig von Q ist.

3.3 Der 2. Hauptsatz der Wertpapierbewertung

Definition 3.3.1. Ein Finanzmarktmodell $\mathcal{M}$ heißt *vollständig*, wenn jeder contingent claim H erreichbar ist.

Satz 3.3.2 (2. Hauptsatz der Wertpapierbewertung)**.** *Ein arbitragefreier Markt $\mathcal{M}$ ist genau dann vollständig, wenn es* genau *ein äquivalentes Martingalmaß gibt.*

Beweis: „⇒“: Sei $\mathcal{M}$ arbitragefrei und vollständig und seien Q und $\bar{Q}$ zwei Martingalmaße. Da auf Grund der Vollständigkeit des Finanzmarktmodells (3.10) für alle $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen gilt, folgt $Q = \bar{Q}$.

„⇐“: Wir zeigen die Negation „$\mathcal{M}$ nicht vollständig ⇒ Q nicht eindeutig“. Definiere die Menge

$$\tilde{M} := \Big\{X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}) :\; X = V_0 + \tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}},\; V_0 \in \mathbb{R},\; \boldsymbol{\theta} \text{ selbstfinanzierende Handelsstrategie}\Big\}.$$

Sei Q ein äquivalentes Martingalmaß und sei H^* ein nicht-erreichbarer claim mit Fälligkeit $T = N$; es gilt $\tilde{H}^* := \frac{H^*}{S_{N,0}} \notin \tilde{M} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}_N, Q)$. $\tilde{M}$ ist also ein echter Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{F}_N, Q)$, also gibt es ein $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_N, Q)$, $Z \neq 0$ mit $E^Q(Z \cdot X) = 0$ für alle $X \in \tilde{M}$. Es folgt speziell $E^Q(Z) = 0$.
Da $|\Omega| = K < \infty$, existiert $||Z||_\infty := \max\{|Z(\omega_k)| :\; k = 1, \dots K\}$. Definiere nun ein neues Maß $\tilde{Q}$ durch

$$\tilde{Q}(\omega) := \left(1 + \frac{Z(\omega)}{2||Z||_\infty}\right) Q(\omega).$$

$\tilde{Q}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da $\tilde{(}Q)(\omega) > 0\ \forall \omega$ und $\tilde{Q}(\Omega) = 1 + \frac{E^Q(Z)}{2||Z||_\infty} = 1$ und es ist $\tilde{Q} \neq Q$, da $Z \neq 0$. Außerdem folgt für alle selbstfinanzierenden Strategien $\boldsymbol{\theta}$

$$E^{\tilde{Q}}(\tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}}) = \underbrace{E^Q(\tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}})}_{=0} + \frac{1}{2||Z||_\infty} \underbrace{E^Q(Z \cdot \tilde{G}_N^{\boldsymbol{\theta}})}_{=0} = 0.$$

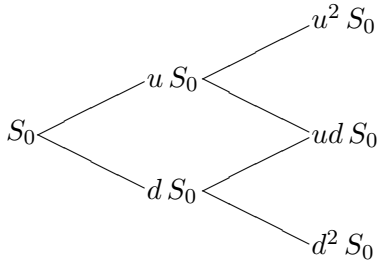
Nach Lemma 3.2.5 ist also auch $\tilde{Q}$ ein Martingalmaß. ■

3.4 Das Cox-Ross-Rubinstein (CRR) Modell

3.4.1 Das Modell

Das Modell von Cox, Ross und Rubinstein (1979) ist ein einfaches Mehrperiodenmodell für eine Aktie. Wesentliches Merkmal ist, dass beim Übergang von einem Zustand zum nächsten nur

zwei Fälle auftreten können, die wir mit up und down bezeichnen. In diesem Abschnitt haben wir einen risikolosen Zinssatz r, d.h. $S_{t,0} = (1+r)^t$. Für unsere betrachtete Aktie schreiben wir einfach $(S_t)_{t=0,\dots,N}$ statt $(S_{t,i})_{t=0,\dots,N}$. Wir wählen ein $u > 0$ und ein $d > 0$ mit $u > 1 + r > d$. Der CRR-Baum sieht folgendermaßen aus:



In jeder Verzweigung tritt ein up mit der Wahrscheinlichkeit p und ein down mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf. Der betrachtete Baum ist *rekombinierbar*, was die numerische Handhabung wesentlich vereinfacht.

Nun benötigen wir noch eine präzise Beschreibung des N-Perioden-CRR-Modells. Dazu wählen wir $\Omega = \{u, d\}^N$, so dass die Elemente von Ω die Gestalt $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ mit $\omega_t \in \{u, d\}$ haben. Für ein festes ω definieren wir die Anzahl der ups bis zum Zeitpunkt t durch

$$j_t(\omega) := \#\{i <= t : \ \omega_i = u\}. \tag{3.11}$$

Damit haben wir eine einfache Darstellung für den Aktienpreis

$$S_t(\omega) = S_0 u^{j_t(\omega)} d^{t - j_t(\omega)}, \ \ t = 0, \dots, N. \tag{3.12}$$

Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,N}$ definieren wir durch

$$\mathcal{F}_t := \sigma\left(S_1, \dots, S_t\right). \tag{3.13}$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß P lassen wir beliebig, fordern allerdings $P(\{\omega\}) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$.

3.4.2 Das äquivalente Martingalmaß

Betrachten wir zunächst den Einperiodenfall. Unter einem äquivalenten Martingalmaß Q muss der diskontierte Aktienpreis ein Martingal sein, mit der Bezeichnung $q := Q(\omega_1 = u)$ erhalten wir also

$$S_0 = E^Q\left(\frac{1}{1+r} S_1\right) = \frac{1}{1+r}\left(qS_0u + (1-q)S_0d\right),$$

was uns

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} \tag{3.14}$$

liefert. Dabei ist $q \in (0, 1)$ genau dann, wenn $d < 1 + r < u$, was wir vorausgesetzt hatten. q ist dann auch eindeutig.

Betrachten wir den Mehrperiodenfall. Wir bestimmen Q rekursiv. Setzen wir im Zeitpunkt t $Q(\omega_{t+1} = u|\mathcal{F}_t) := q$ und $Q(\omega_{t+1} = d|\mathcal{F}_t) = 1 - q$ so erhalten wir

$$Q(\{\omega\}) = q^{j_t(\omega)}(1-q)^{t - j_t(\omega)}. \tag{3.15}$$

Die Definition von q liefert uns die Martingaleigenschaft des diskontierten Wertpapierpreises, aus der Eindeutigkeit von q für jede Periode folgt die Eindeutigkeit von Q. Das betrachtete

CRR-Modell ist also vollständig und arbitragefrei. Es ist noch zu erwähnen, dass die Produktstruktur von Q in (3.15) bedeutet, dass aufeinanderfolgende Bewegungen (ups and downs) unter Q unabhängig sind. Wir erhalten also folgende Darstellung $S_t = S_0 \cdot \xi_1 \cdots \xi_t = S_0 \prod_{s=1}^{t} \xi_s$, wobei die ξ_s unter Q unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit $Q(\xi_s = u) = q$. Natürlich ist $E^Q\left(\frac{\xi_s}{1+r}\right) = 1$.

3.4.3 Vollständigkeit und Hedging-Strategien

Da das Martingalmaß Q eindeutig ist, muss nach dem 2. Hauptsatz der Wertpapierbewertung der betrachtete Markt vollständig sein. Für jeden contingent claim gibt es also eine replizierende Handelsstrategie, die wir im folgenden bestimmen wollen. Wir betrachten ein 2-Perioden-Modell und einen claim $H(\omega)$ mit Fälligkeit in $T = 2$. Nehmen wir nun an, dass wir uns im Zeitpunkt $t = 1$ im up-Zustand befinden, dann muss für die replizierende Handelsstrategie $\boldsymbol{\theta}_2(u) = (\theta_{2,0}(u), \theta_{2,1}(u))'$ gelten, dass

$$\begin{aligned} \theta_{2,0}(u) \cdot (1+r)^2 + \theta_{2,1}(u) \cdot u\, S_1(u) &= H(u,u) \\ \theta_{2,0}(u) \cdot (1+r)^2 + \theta_{2,1}(u) \cdot d\, S_1(u) &= H(u,d), \end{aligned}$$

und erhalten sofort

$$\theta_{2,1}(u) = \frac{H(u,u) - H(u,d)}{S_1(u)\,(u-d)} = \frac{H(u,u) - H(u,d)}{S_0\, u(u-d)} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \theta_{2,0}(u) &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[H(u,u) + u\frac{H(u,d) - H(u,u)}{u-d}\right] \\ &= \frac{u\,H(u,d) - d\,H(u,u)}{(u-d)(1+r)^2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Den Wert dieses Portfolios zum Zeitpunkt $t = 1$ liefert uns das risikoneutrale Bewertungsprinzip $E^Q\big(\frac{1}{1+r}H(\omega) \,\big|\, \mathcal{F}_1\big)$, also im Fall $\omega_1 = u$

$$V_1(u) = \frac{1}{1+r}\left(q\,H(u,u) + (1-q)\,H(u,d)\right).$$

Die Berechnungen für den Fall, dass $\omega_1 = d$ ist, verlaufen analog. Für die Hedgingstrategie im Zeitpunkt $t = 0$ nutzen wir rekursiv die oben erhaltenen Ergebnisse. Dabei hedged man nun den claim $V_1(\omega_1)$, also

$$\begin{aligned} \theta_{1,0}(1+r) + \theta_{1,1} u\, S_0 &= V_1(u) \\ \theta_{1,0}(1+r) + \theta_{1,1} d\, S_0 &= V_1(d), \end{aligned}$$

und erhält

$$\theta_{1,1} = \frac{V_1(u) - V_1(d)}{S_0(u-d)} \quad \text{und} \quad \theta_{1,0} = \frac{u\,V_1(d) - d\,V_1(u)}{(1+r)(u-d)}.$$

Interessant ist die genauere Betrachtung von $\theta_{1,1} = \frac{V_1(u)-V_1(d)}{S_1(u)-S_1(d)}$. Nehmen wir an, dass $V_1(\omega_1) = f\big(S_1(\omega_1)\big)$ z.B. der payoff eines Calls mit Fälligkeit $T = 1$ wäre, so wäre $\theta_{1,1}$ die (diskrete) Ableitung von f nach S. Dies scheint vernünftig, da man gerade so viele Aktien kauft, dass sich die Veränderung des Wertes des Portfolios genauso verhält, wie die Veränderung des Derivates, also

$$\frac{V_1(u) - V_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)} \cdot (S_1(u) - S_1(d)) \sim V_1(u) - V_1(d).$$

Konkrete Aussagen zur Bewertung von Optionen im CRR-Modell im N-Periodenfall werden im folgenden Abschnitt getroffen.

3.4.4 Optionen im CRR-Modell

Satz 3.4.1. *Im CRR-Modell mit $d < 1 + r < u$ ist der Preis eines europäischen Calls zur Zeit $t = 0, 1, \ldots, N$ mit Ausübungswert K und Restlaufzeit τ gegeben durch*

$$C_t = \frac{1}{(1+r)^\tau} \sum_{j=0}^{\tau} \binom{\tau}{j} q^j (1-q)^{\tau-j} \Big(S_t(\omega) u^j d^{\tau-j} - K \Big)^+ . \tag{3.18}$$

Bemerkung. Möchte man explizit auf die Maturität $T = N$ verweisen, so wendet man obigen Satz auf $\tau = N - t$ an.

Beweis: Nach der risikoneutralen Bewertungsregel müssen wir nur den folgenden Erwartungswert (mit $N = t + \tau$)

$$C_t = E^Q \Big(\frac{1}{(1+r)^\tau} (S_N - K)^+ \;\Big|\; F_t \Big)$$

berechnen. Dabei ist $S_N = S_t \prod_{i=1}^{\tau} \xi_i$, wobei die ξ_i jeweils den Wert u (mit Wahrscheinlichkeit q) oder d (mit Wahrscheinlichkeit $1-q$) annehmen. Allerdings kommt es nicht auf die Reihenfolge an. Die Wahrscheinlichkeit für j ups ist $q^j(1-q)^{\tau-j}$. Insgesamt haben wir τ Stellen zu besetzen, die Kombination mit j ups taucht also $\binom{\tau}{j}$-mal auf. Wir erhalten also

$$C_t = \frac{1}{(1+r)^\tau} \sum_{j=0}^{N} \binom{\tau}{j} q^j (1-q)^{\tau-j} (S_t u^j d^{\tau-j} - K)^+ .$$

■

Es gibt natürlich noch eine Menge komplizierterer Optionen als einfache Calls. Ein Beispiel dafür sind sogenannte Barrier-Optionen. Sie dienen typischerweise dazu, einen „billigeren“ Call bzw. Put anzubieten. Man unterscheidet hier zwischen zwei Mechanismen beim Treffen einer Barriere: knock-in und knock-out. Beim knock-in wird der Kontrakt erst dann aktiviert, wenn die Barriere innerhalb der Laufzeit erreicht wurde. Wird die Barriere nicht erreicht, ist der Kontrakt wertlos. Beim knock-out ist es gerade umgekehrt; beim ersten Erreichen der Barriere wird der Kontrakt wertlos. Desweiteren unterscheidet man, ob die Barriere von oben („up“) oder von unten („down“) durchbrochen wird. Es gibt demnach vier Typen von Barrier-Optionen: down-and-out, down-and-in, up-and-out und up-and-in. Eine Beziehung ist sofort klar: Hält man eine knock-out und eine knock-in Option vom gleichen Typ, so ist der Wert des Portfolios gleich dem Wert einer Standard-Option.
Es gibt auch Optionen mit einer zeitabhängigen Barriere, z.B. Asian barrier options, wo das geometrische Mittel des Aktienkurses die Rolle des Indikators spielt, oder Forward start, Early ending, Window barrier options, bei denen nur ein Teilbereich der Barriere eine Rolle spielt.
Ein Lookback Call hat den Payoff $(S_T - \min_{n \in [\bar{t}, T]} S_n)^+$ für ein festes $t < \bar{t} < T$. Die risikoneutrale Bewertungsformel liefert hier

$$LC = \frac{1}{(1+r)^T} \left(E^Q(S_T) - E^Q(\min_{n \in [\bar{t}, T]} S_n) \right).$$

Ein nützliches Hilfsmittel für die Bewertung einer Barrier-Option ist das Spiegelungsprinzip.

Das Spiegelungsprinzip. Im CRR-Modell müssen wir zwei grundsätzliche Fälle unterscheiden, $p = 1 - p = P(\text{„up“}) = P(\text{„down“}) = \frac{1}{2}$ und $p \neq \frac{1}{2}$. Der erstere Fall ist natürlich der einfachere.

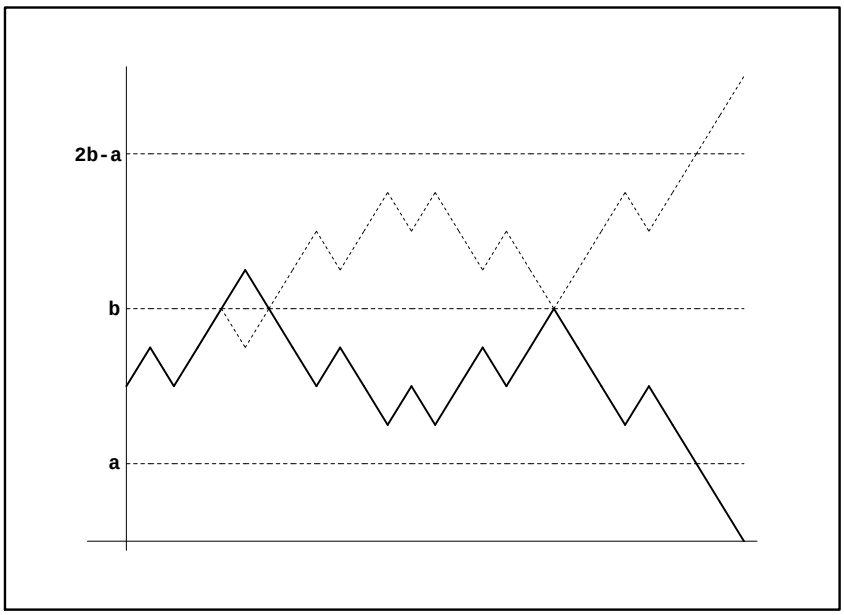
Satz 3.4.2. *Für $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ mit $\xi_i \in \{u, -u\}$ iid und $P(\xi_i = u) = \frac{1}{2}$ gilt*

$$P(S_n \leq a, \max_{1\leq i\leq n} S_i \geq b) = P(S_n \geq 2b - a), \tag{3.19}$$

wobei $0 < a \leq b = ku$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Die wesentliche Idee ist in folgender Skizze ersichtlich. Die durchgezogene Linie stellt einen Beispielpfad für $(S_t)_{0\leq t\leq n}$ dar, der $\max S_i \geq b$ erfüllt. Für diesen gibt es einen ab $\tau := \inf\{1 \leq i \leq n : \ S_i \geq b\}$ an b gespiegelten Pfad (gestrichelte Linie)

$$\tilde{S}_i(\omega) = \sum_{j=1}^{\tau(\omega)} \xi_j(\omega) - \sum_{j=\tau(\omega)+1}^{i} \xi_j(\omega), \quad i \geq \tau(\omega). \tag{3.20}$$



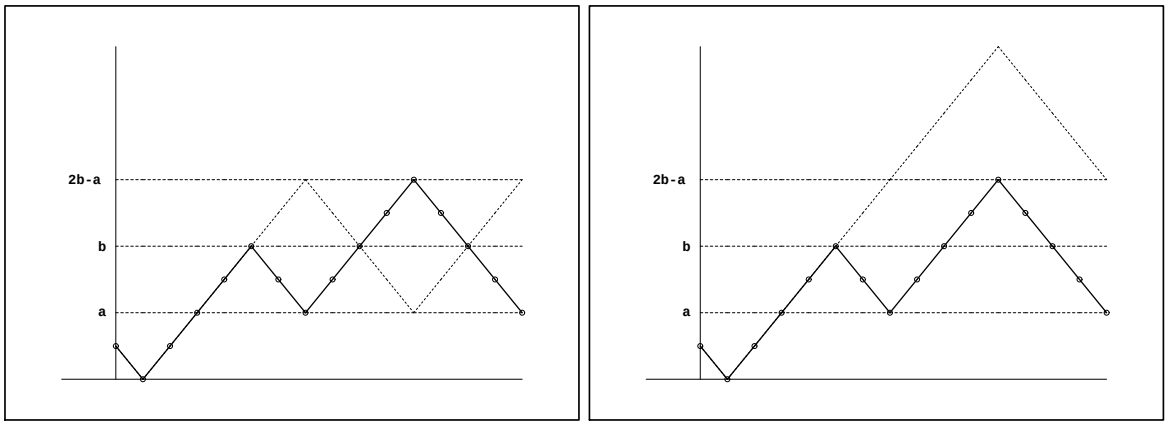
Die Bedingung $\{S_n \leq a\}$ wird für den gespiegelten Pfad zu $\{S_n \geq 2b - a\}$, die Bedingung $\{\max S_i \geq b\}$ ist für den gespiegelten Pfad immer erfüllt. Da wir $p = P(\xi_i = u) = \frac{1}{2}$ vorausgesetzt haben, hat jeder Pfad die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $p^j(1-p)^{n-j} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (j ist Anzahl der ups). ■

Für den asymmetrischen Fall $p \neq 1 - p$ muss man beachten, dass der gespiegelte Pfad eine andere Wahrscheinlichkeit hat. Deswegen formulieren wir die Aussage auch nur für festes a und b.

Satz 3.4.3. *In der Notation von Satz 3.4.2 mit $b = ku$ und $a = lu$ gilt:*

$$P(S_n = a, \max_{1\leq i\leq n} S_i \geq b) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k-l} P(S_n = 2b - a). \tag{3.21}$$

Beweis: Wir betrachten die Folgenden beiden Bilder. Im linken Bild sind wieder ein Beispielpfad und der zugehörige an b gespiegelte Pfad dargestellt. Da $p \neq 1 - p$ gilt, haben diese beiden Pfade unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten. Im rechten Bild erzeugen wir einen neuen Pfad (gestrichelte Linie) durch Ersetzen von zwei downs durch ups, alle anderen ups und downs werden vom ursprünglichen Pfad (durchgezogene Linie) übernommen.



Die Schlüsselbeobachtung ist also, dass nur eine feste Anzahl von downs in ups getauscht werden muss, nämlich so viele, wie Knotenpunkte von b nach a führen (im Beispiel 2 Knotenpunkte). Mit unserer Notation $b = ku$ und $a = lu$ besitzt der gespiegelte Pfad gerade $k - l$ ups mehr als der Originalpfad. Die Anzahl der Pfade bleibt gleich, aber die Wahrscheinlichkeit ändert sich, und zwar muss an $k - l$ Stellen $1 - p$ durch p ersetzt werden, also

$$P(S_n = a, \max_{1\le i\le n} S_i \ge b) = P(S_n = 2b - a)\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k-l}.$$

■

Wir möchten das Spiegelungsprinzip nun für die Bewertung eines up-and-in Calls verwenden. Dazu wandeln wir das betrachtete Modell $S_t = S_0 \prod_{i=1}^t \xi_i$ durch Logarithmieren von Produkt- auf Summengestalt um, und erhalten

$$\tilde{S}_t := \ln \frac{S_t}{S_0} = \sum_{i=1}^t \ln \xi_i.$$

Die Bedingung $(\ln \xi_i) \in \{a, -a\}$ ist nun gleichbedeutend mit $\xi_i \in \{e^a, e^{-a}\} := \{u, \frac{1}{u}\}$. Mit der Barriere $B > K$ erhalten wir

$$\begin{aligned} C^{\text{up-and-in}} &= E^Q\left(\frac{1}{(1+r)^T}(S_T - K)^+ 1_{\{\max_{1\le j\le T} S_j \ge B\}}\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^T}\sum_{i=1}^T E^Q\left(1_{\{S_T = S_0 \frac{u^i}{u^{T-i}}\}}\left(S_0\frac{u^i}{u^{T-i}} - K\right)^+ 1_{\{\max_{1\le j\le T} S_j \ge B\}}\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^T}\sum_{i: S_0 \frac{u^i}{u^{T-i}} = S_0 u^{2i-T} \ge K} Q\left(S_T = S_0 u^{2i-T}, \max_{1\le j\le T} S_j \ge B\right)(S_0 u^{2i-T} - K). \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir noch die Wahrscheinlichkeit bestimmen. Mit $B = S_0 u^k$ und $2i - T < k$ (d.h. $B > S_T > K$) haben wir

$$Q\left(S_T = S_0 u^{2i-T}, \max_{1\le j\le T} S_j \ge B\right) = Q\left(\ln \frac{S_T}{S_0} = (2i - T)\ln u, \max_{1\le j\le T} \ln \frac{S_j}{S_0} \ge k \ln u\right).$$

Hierauf lässt sich das asymmetrische Spiegelungsprinzip anwenden und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k+T-2i} Q\left(\ln\frac{S_T}{S_0} = 2k\ln u - (2i-T)\ln u\right) \\
&= \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k+T-2i} Q\underbrace{\left(S_T = S_0 u^{2k+T-2i}\right)}_{\text{d.h. wir haben zunächst } 2k+T-2i \text{ ups und auf den restlichen Knotenpunkten ebensoviele ups und downs}} \\
&= \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k+T-2i} Q\left(S_T : \; S_T \text{ hat } T+k-i \text{ ups und } i-k \text{ downs}\right) \\
&= \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k+T-2i} \binom{T}{T+k-i} q^{T+k-i}(1-q)^{i-k}.
\end{aligned}
$$

3.5 Konvergenz der Optionspreise im Binomialmodell und Black-Scholes-Formel

In diesem Kapitel werden wir das CRR-Modell für immer feinere Abstände betrachten und die Konvergenz von Optionspreisen analysieren. Für eine bestimmte Wahl der Konvergenz der Schritthöhen im CRR-Modell erhält man als Grenzwert das berühmte Black-Scholes-Modell. Dabei wird aus der im vorigen Kapitel abgeleiteten Call-Bewertungsformel (Satz 3.4.1) die berühmte Black-Scholes-Formel.

Wir betrachten den festen Zeitraum $[0,T]$ und unterteilen ihn in n äquidistante Intervalle der Länge $\Delta_n = \frac{T}{n}$. Der risikolose Return im sogenannten „continuous compounding“ für ein Intervall ist gerade $e^{\Delta_n r}$. Die Wahl der Wertänderung pro Schritt ist das eigentlich Wichtige. Wir bezeichnen mit $\sigma > 0$ die Volatilität und definieren die Zufallsgröße

$$\xi_i^n := \begin{cases} \exp\left(r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}\right) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ \exp\left(r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}\right) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}.$$

Der Aktienkurs im Zeitpunkt T im Modell mit n Intervallen ist dann gegeben durch $S_T^n = S_0 \prod_{i=1}^n \xi_i^n$; die sogenannten log-returns, also die logarithmische Rendite ist

$$\ln \frac{S_i^n}{S_{i-1}^n} = \ln \xi_i^n = r\Delta_n \pm \sigma\sqrt{\Delta_n}, \quad 1 \le i \le n.$$

Wir werden sehen, dass für $p = \frac{1}{2}$ die Standardabweichung der returns über einer Periode gerade $\sigma\sqrt{\Delta_n}$ ist, weshalb die Bezeichnung Volatilität für σ gerechtfertigt ist.

3.5.1 Konvergenz unter dem historischen Maß

Wir nehmen an, dass unter dem historischen Maß P gilt $p = 1-p = \frac{1}{2}$. Dann haben wir für den Erwartungswert und die Varianz der log-returns

$$\begin{aligned} E(\ln \xi_i^n) &= \frac{1}{2}(r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}) + \frac{1}{2}(r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}) = r\Delta_n \\ \operatorname{var}(\ln \xi_i^n) &= E\left((\ln \xi_i - r\Delta_n)^2\right) = \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{\Delta_n})^2 + \frac{1}{2}(-\sigma\sqrt{\Delta_n})^2 = \sigma^2\Delta_n. \end{aligned}$$

Da $\ln S^n(T) = \ln S_0 + \sum_{i=1}^n \ln \xi_i^n$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} E\big(\ln S^n(T)\big) &= \ln S_0 + \sum_{i=1}^n E(\ln \xi_i) = \ln S_0 + nr\Delta_n = \ln S_0 + rT \\ \operatorname{var}\big(\ln S^n(T)\big) &= \operatorname{var}\Big(\sum_{i=1}^n \ln \xi_i\Big) = \sum_{i=1}^n Var\big(\ln \xi_i\big) = n\sigma^2\Delta_n = \sigma^2 T, \end{aligned}$$

wobei die Unabhängigkeit der ξ_i^n ausgenutzt wurde.

Die Summe besteht aus unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $\ln \xi_i^n$, welche nach dem zentralen Grenzwertsatz (für Dreieckssummen) gegen eine normalverteilte Zufallsvariable konvergiert.

Theorem 3.5.1 (erweiterte Version des zentralen Grenzwertsatzes)**.** *Sei für jedes $n \in N$ eine Folge $Y^n = (Y_1^n, \ldots, Y_n^n)$ von Zufallsvariablen gegeben mit folgenden Eigenschaften.*

i) Für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt $|Y_i^n| \le K^n$ für eine Konstante K^n mit $K^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

ii) Für jedes feste n sind die Zufallsvariablen $(Y_i^n)_{1\le i\le n}$ iid.

iii) Für $Z^n := \sum_{i=1}^n Y_i^n$ gilt $E(Z^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$, $\mathrm{var}(Z^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2$.

Dann konvergiert die Folge $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartung μ und Varianz σ^2.

Anwenden von Lemma 3.5.1 liefert also

$$\ln S^n(T) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\ln S_0 + rT, \sigma^2 T) \quad \text{für } n \to \infty, \tag{3.22}$$

was bedeutet, dass für jede beschränkte und stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$E\Big(f\big(\ln S^n(T)\big)\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 T}} \exp\left(\frac{(x - \ln S_0 - rT)^2}{2\sigma^2 T}\right) dx.$$

3.5.2 Konvergenz unter dem Martingalmaß

Zunächst betrachten wir die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten im Modell mit n Intervallen an. Diese sind gegeben durch

$$q_n = \frac{e^{r\Delta_n} - d_n}{u_n - d_n} = \frac{e^{r\Delta_n} - e^{r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}}} = \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}.$$

Lemma 3.5.2. *Es gilt*

$$q_n = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\Delta_n} + \mathcal{O}(\Delta_n), \tag{3.23}$$

insbesondere also $\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{2}$.

Beweis: Für $x \to 0$ gilt $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}} \\ &= \frac{1 - (1 - \sigma\sqrt{\Delta_n} + \frac{\sigma^2\Delta_n}{2} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}))}{(1 + \sigma\sqrt{\Delta_n} + \frac{\sigma^2\Delta_n}{2} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})) - (1 - \sigma\sqrt{\Delta_n} + \frac{\sigma^2\Delta_n}{2} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}))} \\ &= \frac{\sigma\sqrt{\Delta_n} - \frac{\sigma^2\Delta_n}{2} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})}{2\sigma\sqrt{\Delta_n} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\Delta_n} + \mathcal{O}(\Delta_n). \end{aligned}$$

■

Wir wollen wieder den zentralen Grenzwertsatz für Dreiecksschemata anwenden und berechnen nun den Erwartungswert und die Varianz der log-returns unter dem Martingalmaß Q.

Lemma 3.5.3. *Unter dem risikoneutralen Maß Q gilt:*

$$\begin{aligned} E^Q(\ln \xi_i^n) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \\ \mathrm{var}^Q(\ln \xi_i^n) &= \sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}). \end{aligned}$$

Beweis: Wir erhalten mit Hilfe von Lemma 3.5.2

$$\begin{aligned}
E^Q(\ln \xi_i^n) &= q_n(r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}) + (1-q_n)(r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}) \\
&= r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}(2q_n - 1) \\
&= r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}(1 - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\Delta_n} + \mathcal{O}(\Delta_n) - 1) \\
&= r\Delta_n - \frac{\sigma^2}{2}\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}), \\
\mathrm{var}^Q(\ln \xi_i^n) &= q_n\left(\sigma\sqrt{\Delta_n} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})\right)^2 + (1-q_n)\left(-\sigma\sqrt{\Delta_n} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})\right)^2 \\
&= q_n\left(\sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})\right) + (1-q_n)\left(\sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})\right) \\
&= \sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}).
\end{aligned}$$

■

Satz 3.5.4. *Für $n \to \infty$ konvergiert die Verteilung von $Z^n(T) = \ln S^n(T)$ unter Q gegen eine Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln S_0$ und Varianz $\sigma^2 T$.*

Beweis: Nach Lemma 3.5.3 ist

$$\begin{aligned}
E^Q\big(Z^n(T)\big) &= \ln S_0 + n\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta_n + \frac{T}{\Delta_n}\mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu, \\
\mathrm{var}^Q\left(Z^n(T)\right) &= n\sigma^2\Delta_n + \frac{T}{\Delta_n}\mathcal{O}(\Delta_n^2) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 T.
\end{aligned}$$

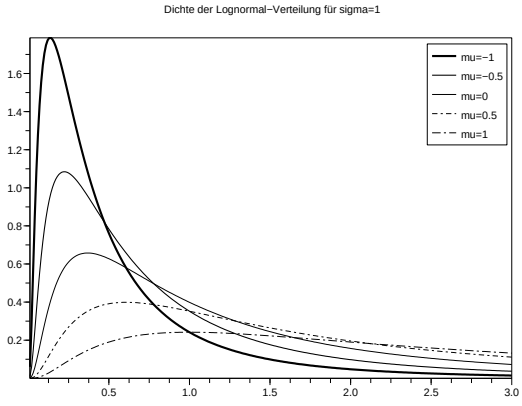
Lemma 3.5.1 liefert die Behauptung. ■

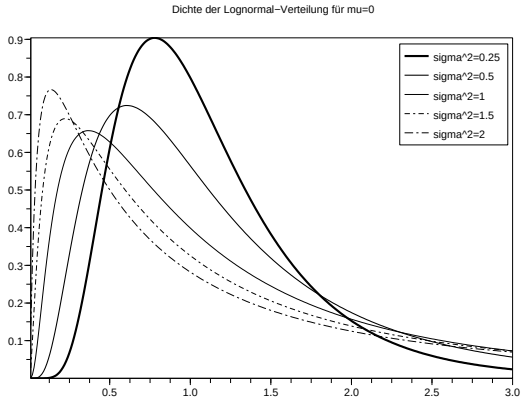
Die Lognormalverteilung Nach Satz 3.5.4 bzw. Gleichung (3.22) konvergiert die Verteilung von $\ln S^n(T)$ für $n \to \infty$ gegen eine Normalverteilung. Es folgt, dass S_T^n asymptotisch lognormal verteilt ist. Dabei hat eine Zufallsvariable S auf $(0,\infty)$ eine Lognormalverteilung mit Parametern μ, σ^2, $S \sim \mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$, falls $Z := \ln S$ gemäß $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ verteilt ist. Die Verteilung hat folgende Eigenschaften.

- **Dichte.** Da $P(S \le x) = P(Z \le \ln x)$, folgt für die Verteilungsfunktion $F_S(x) = F_Z(\ln x)$, $x > 0$. Damit gilt für die Dichtefunktionen

$$F_S(x)' = F_Z'(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}}\exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3.24}$$

  Die folgenden beiden Bilder zeigen die Dichtefunktion für verschiedene Parameter von μ und σ^2.





- **Erwartungswert und Varianz.** Es gilt $E(S) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ und $\mathrm{var}(S) = \exp\big(2\mu + \sigma^2\big)\big(e^{\sigma^2} - 1\big)$.

3.5.3 Die Black-Scholes Formel

Lemma 3.5.5. *Für $n \to \infty$ konvergiert der Preis einer europäischen Call-Option gegen $e^{-rT}E\Big((e^{Z_T} - K)^+\Big)$, wobei $Z_T \sim \mathcal{N}\Big(\ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T\Big)$.*

Beweis: *Idee:* Der Call-Preis im Modell mit n Diskretisierungen ist als Erwartungswert der diskontierten Endauszahlung unter dem Martingalmaß gegeben,

$$C_0^n = e^{-rT}E\Big((e^{Z_T^n} - K)^+\Big), \quad Z_T^n = \ln S_T^n.$$

Die Behauptung folgt also aus der Definition der schwachen Konvergenz. Ein Problem stellt sich jedoch, da die Auszahlung eines Calls zwar stetig, aber unbeschränkt ist, so dass der zentrale Grenzwertsatz nicht direkt angewendet werden kann. Via Put-Call-Parität kann dieses Problem gelöst werden.
Technische Details: Für einen Put gilt wegen der Beschränktheit der Auszahlungsfunktion

$$P_0^n = e^{-rT}E\Big((K - e^{Z_T^n})^+\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-rT}E\Big((K - e^{Z_T})^+\Big) =: P_0.$$

Da $e^{Z_T} \sim \mathcal{LN}\Big(\ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T\Big)$, erhalten wir für den Aktienkurs $e^{-rT}E\Big(e^{Z_T}\Big) = S_0 = S_0^n$.
Aus der Put-Call-Parität für das Modell mit n Diskretisierungen folgt

$$C_0^n = S_0 - Ke^{-rT} + P_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_0 - Ke^{-rT} + P_0.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} P_0 + S_0 - e^{-rT}K &= e^{-rT}\Big[E\Big((K - e^{Z_T})^+\Big) + e^{rT}S_0 - K\Big] \\ &= e^{-rT}E\Big((K - e^{Z_T})^+ + e^{Z_T} - K\Big) \\ &= e^{-rT}E\Big((e^{Z_T} - K)^+\Big), \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. ■

Jetzt können wir unser Hauptergebnis formulieren.

Satz 3.5.6. *Gegeben sei eine Folge von Binomialmodellen mit*

$$u_n = \exp\left(r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}\right), \quad d_n = \exp\left(r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}\right), \quad \Delta_n = \frac{T}{n}$$

und stetiger Verzinsung mit Zinssatz r. Dann konvergiert der Preis einer Europäischen Call-Option mit Ausübungspreis K und Fälligkeit T für $n \to \infty$ gegen

$$C_0 := S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{3.25}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist und

$$d_1 := \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{3.26}$$

$$d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{3.27}$$

Bemerkung. Der Ausdruck (3.25) ist die Black-Scholes Formel für eine europäische Call-Option.

Beweis: Nach Lemma 3.5.5 ist zu zeigen, dass (3.25) gleich $e^{-rT}E\Big((e^{Z_T}-K)^+\Big)$ ist. Wir definieren

$$\alpha := \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}},\ \ \mu := \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \ \tilde{\sigma} := \sigma\sqrt{T},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} e^{-rT}E\Big((e^{Z_T}-K)^+\Big) &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^x - K\big)^+ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) dx \\ &= \underbrace{\alpha \int_{\ln K}^{\infty} e^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_1} - \underbrace{K\,\alpha \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_2}. \end{aligned}$$

Wir berechnen im folgenden das Integral I_1. Durch eine quadratische Ergänzung stellt man den Integranden als Produkt einer Normalverteilungsdichte und eines variablenfreien Korrekturterms dar. Der Integrand von I_1 hat die Form $\exp\Big(\lambda(x)\Big)$ mit

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= x - \frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2} = -\frac{-2\tilde{\sigma}^2 x + x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\tilde{\sigma}^2} \\ &= -\frac{\Big(x-(\mu+\tilde{\sigma}^2)\Big)^2 + \Big(\mu^2 - (\mu+\tilde{\sigma}^2)^2\Big)}{2\tilde{\sigma}^2} \\ &= -\frac{\Big(x-(\ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T)\Big)^2}{2\sigma^2 T} + (\ln S_0 + rT), \end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichheit durch einsetzen von $\mu+\tilde{\sigma}^2 = \ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T$ und $\frac{(\mu+\tilde{\sigma}^2)^2-\mu^2}{2\tilde{\sigma}^2} = \mu + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} = \ln S_0 + rT$ erhält. Unter Beachtung von $\alpha e^{\ln S_0 + rT} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} S_0$ folgt

$$I_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Big(x-(\ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T)\Big)^2}{2\sigma^2 T}\right) dx. \tag{3.28}$$

Betrachten wir nun eine normalverteilte Zufallsvariable $\tilde{Z}$ mit $\tilde{Z} \sim \mathcal{N}\Big(\ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T\Big)$, dann ist $\frac{\tilde{Z}-\ln S_0-(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Gleichung (3.28) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} I_1 &= S_0\, P(\tilde{Z} > \ln K) \\ &= S_0\, P\left(\frac{\tilde{Z}-\ln S_0-(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{\ln K - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= S_0\, P\left(\frac{\tilde{Z}-\ln S_0-(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > -d_1\right) \\ &= S_0\Big(1-\Phi(-d_1)\Big) = S_0\Phi(d_1), \end{aligned}$$

wobei man die Symmetrieeigenschaft der Standardnormalverteilung ausnutzt. Die Berechnung von Integral I_2 geht analog, hier kann sogar auf die quadratische Ergänzung verzichtet werden. ■

3.5.4 Eigenschaften von Call- und Putpreisen

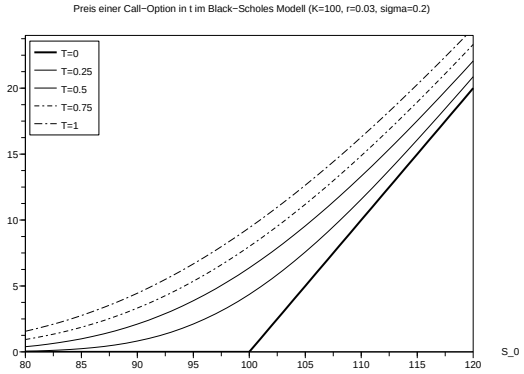
Neben der Black-Scholes Formel für eine Europäischen Call

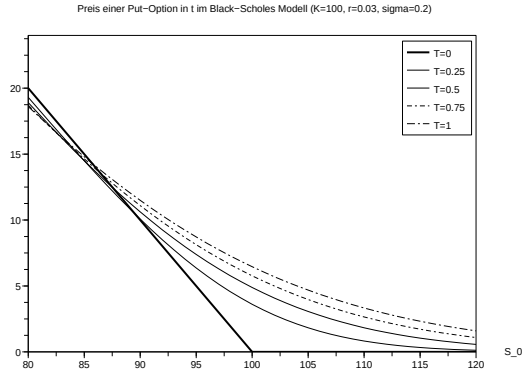
$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

lässt sich mittels der Put-Call-Parität auch eine Formel zur Berechnung des Putpreises angeben,

$$P_0 = -S_0\Phi(-d_1) + Ke^{-rT}\Phi(-d_2),$$

wobei d_1 und d_2 in (3.26) bzw. (3.27) definiert sind. Die folgenden beiden Bilder zeigen den Call- bzw. Putpreis in Abhängigkeit des Aktienwertes.





Die hedge ratio. Wir erinnern uns an das Hedging im Binomialmodell. In (3.16) und (3.17) haben wir gezeigt, dass wir im Zeitpunkt t das replizierendes Portfolio zu einem Anteil von $\theta_{t,1}$ aus der Aktie bestehen muss mit

$$\theta_{t+1,1} = \frac{C_{t+1}(u) - C_{t+1}(d)}{S_t(u-d)}.$$

Schaut man sich $\theta_{t+1,1}$ genauer an, so sieht man, dass $\theta_{t+1,1}$ die diskrete Ableitung von C bezüglich S ist,

$$\theta_{t+1,1} = \frac{\Delta C_{t+1}}{\Delta S_{t+1}} \approx \frac{\partial C}{\partial S}. \tag{3.29}$$

Im Black-Scholes Modell erhält man für θ_1 also die Ableitung bezüglich des Aktienpreises. Für eine mathematisch korrekte Herleitung werden allerdings Hilfsmittel der stetigen Finanzmathematik benötigt. Die Ableitung des Optionspreises bzgl. des Aktienkurses wird auch als *Delta* oder *hedge ratio* bezeichnet. Eine durchaus nicht ganz triviale Rechnung zeigt (!)

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) \\ \Delta_P &= \frac{\partial P}{\partial S} = -\Phi(-d_1) \end{aligned}$$

Bemerkung. Es ist $\Delta_P = \Delta_C - 1$.

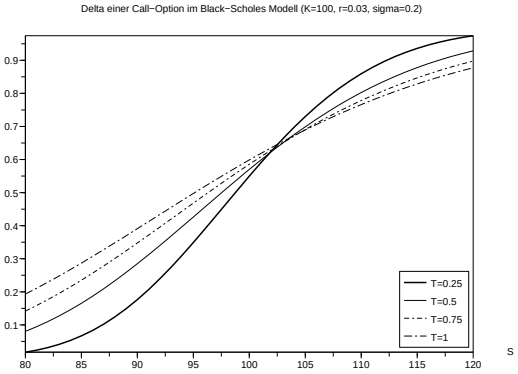
Nun kann man sich auch für die Sensitivität von Delta interessieren, d.h. wie sensitiv ist unser Hedge bezüglich Änderungen des Aktienpreises. Diese Sensitivität wird duch Gamma ausgedrückt. Sei φ die Dichte der Standardnormalverteilung. Wir erhalten

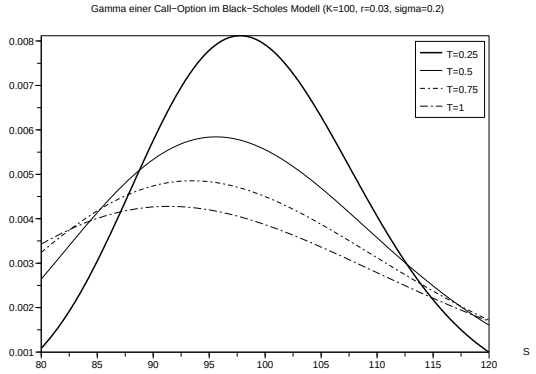
$$\begin{aligned} \Gamma_C &= = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\varphi(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}} \\ \Gamma_P &= \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \Gamma_C. \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Es gilt $0 \leq \Delta_C \leq 1$. Liegt ein Call weit im Geld ($S > K$), so steigt die Wahrscheinlichkeit „in-the-money“ zu enden, deshalb geht sein Delta gegen 1. Umgekehrt profitieren Calls, die weit aus dem Geld liegen, wenig von einem Aktienwachstum, deshalb geht ihr Delta gegen 0.
- Es gilt immer $\Gamma_C > 0$. Mit wachsendem Aktienpreis steigt die Wahrscheinlichkeit „in-the-money“ zu enden, d. h. wir benötigen einen größeren Anteil der Aktie im replizierenden Portfolio, also muss Delta wachsen.

Die folgenden Bilder verdeutlichen den Verlauf von Delta und Gamma für eine Call-Option.





Weitere Greeks. Zur Bewertung einer Europäischen Option mit festem Ausübungspreis K und festem Ausübungzeitpunkt im Black-Scholes Modell benötigen wir neben dem Aktienpreis noch weitere Parameter, die Restlaufzeit T, die Volatilität σ und den Zinssatz r. Man betrachtet auch bezüglich dieser Parameter die partiellen Ableitungen des Optionspreises und erhält die folgenden Sensitivitäten.

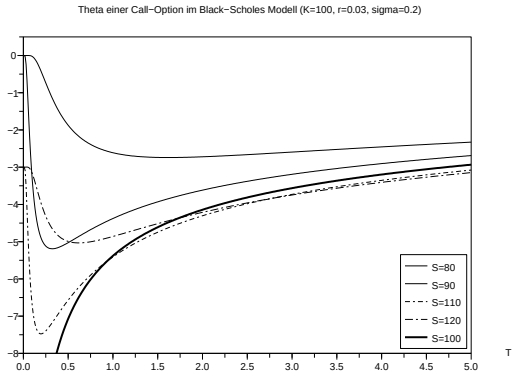
$$\begin{aligned}
\text{Vega}_C &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_0\sqrt{T}\varphi(d_1) \\
\text{Vega}_P &= \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \text{Vega}_C \\
\text{Theta}_C &= \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S_0\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\Phi(d_2) \\
\text{Theta}_P &= \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{S_0\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}\Phi(-d_2) \\
\text{Rho}_C &= \frac{\partial C}{\partial r} = KTe^{-rT}\Phi(d_2) \\
\text{Rho}_P &= \frac{\partial P}{\partial r} = -KTe^{-rT}\Phi(-d_2)
\end{aligned}$$

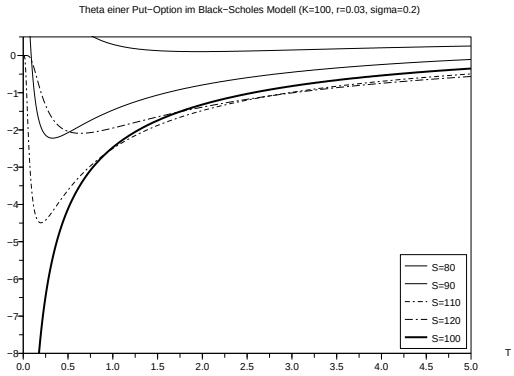
Bemerkung.

- Vega ist kein griechischer Buchstabe. Vega ist immer positiv. Eine wachsende Volatilität führt zu einer breiteren Verteilung des Aktienkursendwertes und damit zu einer höheren Wahrscheinlichkeit, dass ein Call im Geld ist.

- Theta ist die Ableitung bezüglich des aktuellen Zeitpunkts bei festem Ausübungszeitpunkt. Das Theta eines Calls ist immer negativ, weil ein Call mit wachsender Restlaufzeit immer wertvoller wird. Das Theta eines Puts hat in der Regel einen Vorzeichenwechsel.

Die beiden folgenden Bilder zeigen Theta für eine Call- und Put-Option.





Volatilitätsschätzungen. Das Black-Scholes Modell benötigt fünf Input-Variable, den Ausübungspreis und den Ausübungszeitpunkt, die festgelegt sind, den Aktienpreis und den Zinssatz, die am Markt abgelesen werden können und die Volatilität, welche nicht direkt beobachtbar ist. Man kann aber z. B. die *historische Volatilität* als Schätzwert nutzen. Man beobachtet an den letzten n Handelstagen den Aktienkurs $\{S_{t_i},\ i = 1, \dots, n\}$ und bildet den Erwartungswert und die Varianz der Log-Returns dieser Daten,

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right), \quad \hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) - \hat{\mu}\right]^2.$$

Mit $\sigma = \hat{\sigma}\sqrt{t_{i+1} - t_i}$ annualisieren wir noch die tägliche historische Volatilität auf eine Jahresbasis.
Man kann aber auch versuchen, die *implizierte Volatilität (implied volatility)* zu schätzen, in dem man am Markt die Preise von Optionen auf dieselbe Aktie beobachtet. Invertieren der Black-Scholes Formel liefert dann die Volatilität. Hier zeigt sich aber das Problem, das verschiedene Optionen verschiedene Volatilitäten liefern, man beobachtet den sogenannten „volatility smile“. Ursachen dafür sind, dass im Black-Scholes Modell keine Transaktionskosten berücksichtigt sind, das Black-Scholes Modell stetiges Handeln annimmt, während am Markt nur diskrete Werte beobachtet werden oder dass die beobachteten Optionspreise und die zugehörigen Aktienpreise zu unterschiedlichen Zeitpunkten beobachtet wurden.

3.6 Optimales Stoppen und Amerikanische Optionen

3.6.1 Optimales Stoppen

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$. Gegeben sei ein *Auszahlungsprozess* H, d.h. ein adaptierter, nicht-negativer Prozess $(H_n)_{n=0,1,\dots,N}$, dabei bezeichne $H_n(\omega)$ die Auszahlung, die man erhält, wenn man das System im Zeitpunkt n und Zustand ω „stoppt“. Wir definieren

$$\mathbb{T} := \left\{\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\},\ \tau \text{ ist Stoppzeit bzgl. } (\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}\right\} \tag{3.30}$$

und können das optimale Stoppproblem formal wie folgt schreiben: Bestimme eine Stoppzeit τ^* mit

$$\tau^* \in \arg\max\big\{E(H_\tau):\ \tau \in \mathbb{T}\big\}. \tag{3.31}$$

Beispiel: Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass die Bewertung einer Amerikanischen Put-Option auf ein Stopp-Problem mit $H_t = e^{-rt}(K - S_t)^+$ führt. Die Diskontierung ist wichtig, um den Einfluss des Auszahlungszeitpunktes richtig zu bewerten.

Beispiel: (H ist ein Martingal.) Nach dem Stoppsatz gilt in diesem Fall für jede Stoppzeit $\tau \in \mathbb{T}$ $E(H_\tau) = H_0$, so dass jede Stoppzeit optimal ist. Die Snell envelope von H ist durch den Prozess H selber gegeben. Es ist also egal, wann man stoppt und somit ist eine kleinste, optimale Stoppzeit durch $\tau_{min} = 0$, und eine größte optimale Stoppzeit durch $\tau_{max} = N$ gegeben.

Definition 3.6.1 (Snell envelope). Der Snell envelope $(U_n)_{n=0,1,\dots,N}$ des Auszahlungsprozesses $(H_n)_{n=0,1,\dots,N}$ ist rekursiv definiert durch

$$U_N := H_N,\ U_n := \max\{H_n,\ E(U_{n+1}|F_n)\} \text{ für } n = N-1, N-2, \dots, 0. \tag{3.32}$$

Proposition 3.6.2. *Der Snell envelope U zum Auszahlungsprozess H ist das kleinste Supermartingal mit $U_n \geq H_n$ für alle $n \in \{0, 1, \dots N\}$.*

Beweis: Nach Defintion von U gilt $U_n \geq H_n$ und $U_n \geq E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, also ist U ein Supermartingal. Sei nun ein weiteres Supermartingal $\tilde{U}$ mit $\tilde{U}_n \geq H_n$ gegeben. In N gilt $U_N = H_N \leq \tilde{U}_N$. Gilt für ein $0 < k \leq N$, dass $U_k \leq \tilde{U}_k$, so folgt

$$U_{k-1} = \max\big\{H_{k-1},\ E(U_k|F_{k-1})\big\} \leq \max\big\{H_{k-1},\ E(\tilde{U}_k|\mathcal{F}_{k-1})\big\} \leq \tilde{U}_{k-1},$$

wobei die letzte Ungleichheit folgt, da $\tilde{U}$ ein Supermartingal mit $\tilde{U}_n \geq H_n$ ist. ■

Proposition 3.6.3 (Charakterisierung optimaler Stoppzeiten)**.** *Eine Stoppzeit $\tau \in \mathbb{T}$ ist optimal genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

1. $H_\tau = U_\tau$
2. *Der gestoppte Prozess U^τ mit $U^\tau_n := U_{\tau \wedge n}$ ist ein Martingal.*

Eine optimale Stoppzeit ist durch $\tau_{min} := \inf\{n = 0, \dots, N:\ U_n = H_n\}$ gegeben.

Beweis: Da U ein Supermartingal mit $U_n \geq H_n$ für alle $n = 0, 1, \dots, N$ ist, gilt

$$E(H_{\tilde{\tau}}) \leq E(U_{\tilde{\tau}}) \leq U_0, \quad \forall \tilde{\tau} \in \mathbb{T}, \tag{3.33}$$

wobei die letzte Ungleichheit aus dem Stoppsatz folgt. Erfüllt nun τ die Bedingungen (i) und (ii), so gilt

$$E(H_\tau) = E(U_\tau) = E(U^\tau_N) = U_0, \tag{3.34}$$

also ist τ optimal. Betrachten wir nun τ_{min}. Nach Definition gilt $U_{\tau_{min}} = H_{\tau_{min}}$. Da U und H adaptiert sind, ist τ_{min} eine Stoppzeit, es ist also $\{\tau_{min} > n\} \in \mathcal{F}_n$. Damit folgt

$$\begin{aligned} E(U^{\tau_{min}}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= 1_{\{\tau_{min} > n\}} E(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + 1_{\{\tau_{min} \leq n\}} U_{\tau_{min}} \\ &= 1_{\{\tau_{min} > n\}} U_n + 1_{\{\tau_{min} \leq n\}} U_{\tau_{min}} \\ &= U^{\tau_{min}}_n, \end{aligned}$$

also ist $U^{\tau_{min}}$ ein Martingal. τ_{min} erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) und ist somit optimal. Umgekehrt folgt aus der Optimalität von τ_{min} Gleichheit in (3.33). Dies impliziert aber sofort die Gültigkeit der Bedingungen (i) und (ii) für jede optimale Stoppzeit. ■

Folgerung 3.6.4. *Es gilt*

$$\sup\Big\{E(H_\tau):\ \tau\in\mathbb{T}\Big\}=U_0. \tag{3.35}$$

Folgerung 3.6.5. *Sei $U_n = M_n + A_n$ die Doob-Zerlegung von U, wobei $(A_n)_{n=0,1,\dots,N}$ ein fallender, previsibler Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Definiere*

$$\tau_{max} := \min\Big\{n\in\{0,1,\dots,N-1\}:\ A_{n+1}\neq 0\Big\}\wedge N, \tag{3.36}$$

wobei $\min\emptyset := \infty$. Dann ist τ_{max} eine Stoppzeit sowie Lösung des optimalen Stoppproblems (3.31). Für jede weitere Lösung τ^* von (3.31) gilt $\tau^* \leq \tau_{max}$.

Beweis: Der Prozess A ist previsibel, deshalb gilt für $n = 0, 1, \dots, N-1$ $\{\tau_{max} = n\} = \{A_n = 0,\ A_{n+1} < 0\} \in \mathcal{F}_n$. In N gilt $\{\tau_{max} = N\} = \{A_N = 0\} \in \mathcal{F}_N$; τ_{max} ist also eine Stoppzeit. Für den gestoppten Prozess gilt aufgrund der Definition von τ_{max}

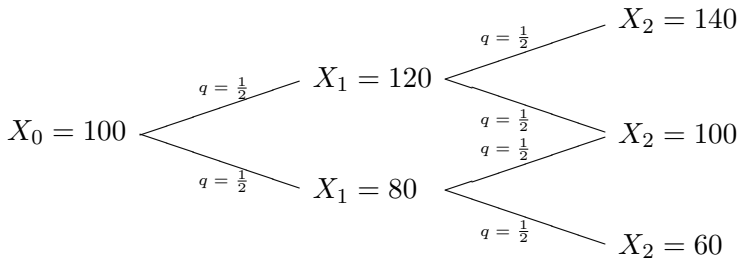
$$U_n^{\tau_{max}} = M_n^{\tau_{max}} + A_n^{\tau_{max}} = M_n^{\tau_{max}},$$

d.h. $U^{\tau_{max}}$ ist ein Martingal und Bedingung (ii) von Proposition 3.6.3 ist erfüllt. Bleibt noch Bedingung (i) ($U_{\tau_{max}} = H_{\tau_{max}}$) zu zeigen. Auf $\{\tau_{max} = N\}$ gilt dies per Definition von U. Betrachten wir $\{\tau_{max} = n < N\}$, auf dieser Menge gilt

$$E(U_{n+1} - U_n \mid \mathcal{F}_n) = (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} < 0.$$

Es gilt also $U_n > E(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ und somit $U_n = H_n$. Nach Proposition 3.6.3 ist τ_{max} somit optimal. Die letzte Behauptung ist leicht zu sehen. ■

Beispiel: („Call-Spread“.) Betrachte eine Zustandgröße X in einem 2-Periodenmodell, die sich gemäß des folgenden Baumes verhält.



Wir betrachten einen Call-Spread mit $K_1 = 100$ und $K_2 = 120$ und haben den Auszahlungsprozess $H_n = (X_n - 100)^+ - (X_n - 120)^+$. Die folgende Tabelle gibt die Werte des Auszahlungsprozesses und der Snell envelope für jeden Pfad an.

Pfad	$n=0$			$n=1$			$n=2$		
ω_1	$X_0=100$	$H_0=0$	$U_0=10$	$X_1=120$	$H_1=20$	$U_1=20$	$X_2=140$	$H_2=20$	$U_2=20$
ω_2	$X_0=100$	$H_0=0$	$U_0=10$	$X_1=120$	$H_1=20$	$U_1=20$	$X_2=100$	$H_2=0$	$U_2=0$
ω_3	$X_0=100$	$H_0=0$	$U_0=10$	$X_1=80$	$H_1=0$	$U_1=0$	$X_2=100$	$H_2=0$	$U_2=0$
ω_4	$X_0=100$	$H_0=0$	$U_0=10$	$X_1=80$	$H_1=0$	$U_1=0$	$X_2=60$	$H_2=0$	$U_2=0$

Die Snell envelope wurde dabei rekursiv definiert.

$$\begin{aligned} U_2 &= H_2 = \begin{cases} 20, & \text{falls } X_2 = 140 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ & E(U_2|\mathcal{F}_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 10, & \text{falls } X_1 = 120 \\ \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ U_1 &= \max\{H_1, E(U_2|\mathcal{F}_1)\} = \begin{cases} \max\{20,10\} = 20, & \text{falls } X_1 = 120 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ & E(U_1|\mathcal{F}_0) = \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 10 \\ U_0 &= \max\{H_0, E(U_1|\mathcal{F}_0)\} = \max\{0,10\} = 10. \end{aligned}$$

Damit erhält man als eine Lösung des Stoppproblems

$$\tau_{min}(\omega) = \inf\Big\{n \in \{0,1,2\} :\ U_n(\omega) = H_n(\omega)\Big\} = \inf\{1,2\} = 1 \ \ \forall \omega \in \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}.$$

3.6.2 Amerikanische Optionen

Wir arbeiten nun wieder unser Mehrperiodenmodell $\mathcal{M}$, welches wir in (3.1) definiert haben, d.h. wir betrachten die $d+1$ Wertpapierpreise $(S_{t,i})_{t=0,1,\ldots,N}$, $i = 0, 1, \ldots, d$, wobei $S_0 > 0$ das Numéraire ist.

Definition 3.6.6. Eine *amerikanische Option* ist gegebn durch einen nicht-negativen, adaptierten Prozess C.

Eine amerikanische Option ist dadurch charakterisiert, dass der Inhaber zu jeder Zeit $t \in \{0, \ldots, N\}$ die Option ausüben kann. In diesem Fall erhält er den Betrag C_t.

Beispiel 3.6.7. Wir stellen drei Optionstypen vor.

(i) Für einen Amerikanischen Put/Call auf das Wertpapier $(S_{t,i})_{t=0,1,\ldots,N}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ ist die Auszahlung bei Ausüben an t $C_t = (K - S_{t,i})^+$, bzw. $C_t = (S_{t,i} - K)^+$ im Falle eines Calls.

(ii) Auch eine europäische Option mit Auszahlen H_N lässt sich als amerikanische Option darstellen. Dafür setzt man $C_t = 0$ für $0 \le t < N$ und $C_N = H_N$.

(iii) Eine Bermuda-Option ist ein Mittelding zwischen amerikanischer und europäischer Option. Bei ihr darf nur an Zeitpunkten in einer echten Teilmenge $\mathcal{T} \subset \{0, \ldots, \mathbb{N}\}$ ausgeübt werden. Für alle anderen Zeitpunkte setzt man natürlich C gleich Null.

Absicherungsstrategien aus Sicht des Verkäufers. Zunächst betrachten wir Absicherungsstrategien für C aus Sicht des Verkäufers in vollständigen Märkten betrachten.

Annahme: Der Markt $\mathcal{M}$ ist arbitragefrei und vollständig.

Das eindeutige Martingalmaß bezeichnen wir mit Q. Die Absicherung des Amerikanischen claims muss unabhängig von der Ausübungsstrategie des Käufers erfolgreich sein. Eine Absicherungsstrategie V muss daher folgende Bedingungen erfüllen:

- In jedem Zeitpunkt $t = 0, 1, \ldots, N$ muss dem Verkäufer ausreichend Kapital zur Deckung zur Verfügung stehen, d.h.

$$V_t \ge C_t, \qquad \forall t \in \{0, \ldots, N\}.$$

- Kostenminimalität: In N sollte das Kapital gleich C_N sein; für jeden Zeitpunkt $t < N$ soll die Absicherung kostenminimal sein.

Als nächstes soll ein möglicher Wertprozess bestimmt werden. Die Vorgehensweise ist durch die Resultate aus dem vorigen Kapitel inspiriert. Wesentlich wird allerdings ein Absicherungsargument eingehen, wozu natürlich die Vollständigkeit des Marktes maßgeblich genutzt wird.

- An N muss gelten, dass $V_N = C_N$.
- An $N-1$ muss zum einen $V_{n-1} \geq C_{N-1}$ gelten, da der Käufer natürlich zu diesem Zeitpunkt ausüben kann. Übt er allerdings nicht aus, so hat er an N einen Anspruch auf den Betrag C_N. Da der Markt vollständig ist, kann man diesen Betrag risikolos absichern und zwar zu dem Preis
$$\mathbb{E}^Q\big(S_{N-1,0}\frac{C_N}{S_{N,0}}|\mathcal{F}_{N-1}\big).$$
- Zusammenfassend ergibt sich, dass
$$V_{N-1} = \max\big\{C_{N-1}; S_{N-1,0}\mathbb{E}^Q(\tilde{C}_N|\mathcal{F}_{N-1})\big\}.$$
Da $V_N = C_N$ ist, folgt
$$\tilde{V}_{N-1} = \max\big\{\tilde{C}_{N_1}; \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_N|\mathcal{F}_{N-1})\big\}.$$
- Eine Iteration obiger Argumente liefert

$$\boxed{\tilde{V}_t = \max\big\{\tilde{C}_t; \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_{t+1}|\mathcal{F}_t)\big\}.}$$

Etwas überraschend liefert also das Absicherungsargument also für den *diskontierten Absicherungsprozess* gerade den Snell envelope $U^{\tilde{C}}$ (bzgl. des Martingalmaßes Q) von $\tilde{C}$. Die Frage ist noch, mit welcher Handelsstrategie V (Super-)repliziert werden kann.

Konstruktion einer Absicherungsstrategie. Da $U^{\tilde{C}}$ ein Supermartingal ist, liefert die Doob-Meyer Zerlegung $U^{\tilde{C}} = M + A$, wobei M ein Martingal und A ein fallender, previsibler Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Da $\mathcal{M}$ vollständig ist, gibt es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\boldsymbol{\theta}$, für deren diskontierten Endwert gilt $\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}} = M_N$. Da $\tilde{V}^{\boldsymbol{\theta}}$ nach Lemma 3.2.3 ein Martingal ist, gilt für alle $t = 0, 1, \ldots, N$

$$\tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} = E^Q(\tilde{V}_N^{\boldsymbol{\theta}} \mid \mathcal{F}_t) = E^Q(\tilde{M}_N \mid \mathcal{F}_t) = M_t.$$

Außerdem gilt $\tilde{C}_t \leq U_t^{\tilde{C}} = M_t + A_t \leq M_t = \tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}}$ und somit $V_t^{\boldsymbol{\theta}} \geq C_t$; die Strategie $\boldsymbol{\theta}$ ist also eine Absicherungsstrategie für den Verkäufer.

Bemerkung. Wir betrachten die optimale Stoppzeit τ_{max} definiert in (3.36). Wir wissen, dass nach Proposition 3.6.3 $\tilde{V}^{\tau_{max}}$ ein Q-Martingal ist und dass $\tilde{V}_{\tau_{max}} = \tilde{C}_{\tau_{max}}$ gilt. Es folgt für den Wertprozess unserer Strategie

- $\tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} = U_t^{\tilde{C}}$ für $t \leq \tau_{max}$,
- $\tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} > U_t^{\tilde{C}}$ für $t > \tau_{max}$ (weil $A_{\tau_{max}+1} < 0$),

- $\tilde{V}_t^{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{C}_t$ für $t = \tau_{max}$.

Insbesondere können wir also zu Zeitpunkten $t > \tau_{max}$ Geld aus dem Portfolio entnehmen, falls die Option bis dahin noch nicht ausgeübt wurde (suboptimale Ausübungsstrategie des Käufers).

Aus Sicht des Verkäufers ist V_t^{θ} der kleinste Betrag, für welchen er sich gegen die Auszahlung der amerikanischen Option absichern kann. Denn, für ein $\mathcal{F}_t$-messbares V_t^* mit

$$\tilde{V}_u^* := \tilde{V}_t^* + \sum_{k=t+1}^{u} \theta_k^* \Delta S_k \geq \tilde{C}_u, \qquad \forall u \geq t$$

ist $\tilde{V}_u^*$ ein Martingal, also insbesondere ein Supermartingal. Da $\tilde{V}_u^*$ $\tilde{C}$ dominiert folgt aus der Minimalität von $U^{\tilde{C}}$, dass $\tilde{V}_u^* \geq U_u^{\tilde{C}}$.

Optimale Ausübung des Käufers. Der Käufer ist interessiert an einer optimalen Strategie zur Ausübung der amerikanischen Option. Ein mögliches Kriterium ist die optimale erwartete, diskontierte Auszahlung:

$$\max_{\tau \in \mathbb{T}} \mathbb{E}^Q(H_\tau)$$

Beispiel 3.6.8. Ist der Käufer an einer Nutzenmaximierung interessiert, möchte er also für ein Funktion u den erwarteten Nutzen $\mathbb{E}^Q(u(H_\tau))$ der diskontierten Auszahlung maximieren, so kann man das in dem vorgestellten Rahmen leicht durch die Betrachtung von $\tilde{H}_t := u(H_t)$ einbeziehen.

Mit den entwickelten Methoden des optimalen Stoppens erhalten wir nun leicht, dass der Wert, den der Käufer durch optimales Ausüben erzielen kann, gleich $V_0^{\boldsymbol{\theta}}$ ist:

Sei τ^* eine Lösung des Problems $\max\{E^Q(\tilde{C}_\tau) : \tau \in \mathbb{T}\}$. Wir wissen, dass Lösungen existieren, z. B. $\tau^* = \tau_{max}$ oder $\tau^* = \tau_{min}$. Nach (3.34) gilt außerdem, dass $E^Q(\tilde{C}_{\tau^*}) = U_0^{\tilde{C}}$. Wir wählen ein festes τ^* und betrachten folgende Strategie:

- Übe die amerikanische Option an t aus, falls $t = \tau^*$
- Investiere den erhaltenen Betrag C_t risikolos

Dies führt zu folgendem Vermögen in N:

$$H^* := \sum_{t=0}^{N} 1_{\{\tau^*=t\}} C_t \frac{S_{N,0}}{S_{t,0}}.$$

Nach der risikoneutralen Bewertungsformel ist der diskontierte faire Preis von H^* gegeben durch

$$E^Q\left(\frac{H}{S_{N,0}}\right) = E^Q\left(\sum_{t=0}^{N} 1_{\{\tau^*=t\}} \tilde{C}_t\right) = E^Q\left(\tilde{C}_{\tau^*}\right) = U_0^{\tilde{C}}.$$

Der Wert der Auszahlung H^* and N liefert aus Käufersicht eine untere Schranke für den Wert der amerikanischen Option. Wegen $U_0^{\tilde{C}} = V_0$ ist also der Wert der amerikanischen Option mindestens V_0.

Zusammenfassend haben wir ($S_{0,0} = 1$)

Satz 3.6.9. *Der faire Wert einer amerikanischen Option gegeben durch C in einem vollständigen, arbitragefreien Markt mit Martingalmaß Q ist gegeben durch $V_0^{\boldsymbol{\theta}} = U_0^{\tilde{C}}$, wobei $U^{\tilde{C}}$ den Snell envelope des diskontierten Auszahlungsprozesses $\tilde{C}$ beschreibt.*

Vergleich amerikanische / europäische Optionen. Im typischen Fall ist der Payoff der amerikanischen Option eine Funktion des Aktienkurses, etwa $C_t = f(S_t)$. Der Payoff der zugehörigen europäischen Option ist C_N an N.

Wir setzen $E_t = S_{t,0}\mathbb{E}^Q(\tilde{C}_N|\mathcal{F}_t)$ für den Wert der europäischen Option. Dann gilt

Lemma 3.6.10. *Der Wert der europäischen Option ist nicht größer als der Wert der amerikanischen Option, $E_t \leq V_t^\theta$.*

Beweis. Für $t = 0$ erhalten wir direkt

$$V_0^\theta = U_0^{\tilde{C}} \geq \mathbb{E}^Q(U_N^{\tilde{C}}) = \mathbb{E}^Q(\tilde{C}_N) = E_0.$$

Hingegen ist für beliebiges t

$$\tilde{V}_t^\theta = M_t \geq M_t - A_t = U_t^{\tilde{C}} \geq \mathbb{E}^Q(U_N^{\tilde{C}}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^Q(\tilde{C}_N|\mathcal{F}_t) = \tilde{E}_t.$$

Daraus folgt, dass $V_t^\theta \geq E_t$. ■

Beispiel 3.6.11. (Amerikanischer Call). Für einen amerikanischen Call ist $C_t = (S_t - K)^+$. Wir nehmen an, dass $S_{t,0}$ monoton wachsend ist. Dann gilt für den Wert des europäischen Calls, dass er wachsend in N ist, denn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q(\tilde{C}_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}^Q\Big(\Big(\frac{S_t}{S_{t,0}} - \frac{K}{S_{t,0}}\Big)^+|\mathcal{F}_t\Big)\\ &\geq \tilde{C}_t\end{aligned}$$

unter Verwendung der Jensenschen Ungleichung und der Tatsache, dass $\tilde{S}$ ein Martingal unter Q ist. Somit ist $H = \tilde{C}$ ein Submartingal, was bedeutet, dass eine optimale Strategie ist, bis N zu warten bevor man ausübt, denn $U_t^H = \mathbb{E}^Q(H_T|\mathcal{F}_t)$. Schließlich ist $U_0^H = E_0$, der Wert des europäischen Calls ist gleich dem Wert des amerikanischen Calls.

Beispiel 3.6.12. Im Falle eines amerikanischen Puts ist es im Gegenzug dazu möglich, dass der Zeitwert

$$W_t = S_{t,0}\mathbb{E}^Q\Big(\frac{(K - S_T)^+}{S_{T,0}}|\mathcal{F}_t\Big) - (K - S_t)^+$$

negativ wird, so dass vorzeitiges Ausüben den (positiven) Wert $-W_t$ liefert.

Ausblick

Die hier abgehandelten Themen bieten nur einen ersten Einblick in die Finanzmathematik in diskreter Zeit. Für eine Analyse von Portfoliooptimierungsproblemen sei etwa auf Pliska (1997) verwiesen; unvollständige Märkte in diskreter Zeit werden etwa in Föllmer & Schied (2004) behandelt.

Kapitel 4

Der Zinsmarkt

4.1 Einführung

Zum Abschluss der Vorlesung diskutieren wir kurz die wichtigsten Produkte auf Zinsmärkten. Zu Beginn werden wir uns mit den primären Produkten am Markt vertraut machen. Im Prinzip entsteht ein Zinsgeschäft bereits, wenn man sein Geld bei einer Bank deponiert, oder sich einen Kredit leiht. Wieso muss man eigentlich einen Zinssatz zahlen, wenn man sich Geld leiht? Die Idee die dahintersteht, ist, dass **1000 EUR heute mehr wert sind als 1000 EUR in einem Jahr**. Den entstehenden Wertverlust gleicht man mit einem Zins aus.

Möchte man bei seiner Bank Geld festlegen, so ist die Laufzeit wesentlich. Für jede Laufzeit gibt es einen anderen Zins. Man spricht von einer Zinskurve:

Als Teilnehmer im Zinsmarkt legt man das Geld nicht bei einer Bank fest, sondern man kauft sich einen Bond. In unserem Fall wäre ein Bond mit *Nennwert* 1000 EUR das richtige. Die Zinszahlungen treten bei einem Bond als Kupons auf, so dass eine Verzinsung von (jährlich) 4 % durch Kupons in der Höhe 40 EUR jeweils nach Ablauf eines Jahres diese Funktion übernehmen könnten. Im Verlaufe der Zeit wird dieser Bond natürlich seinen Wert ändern, je nachdem ob die Zinsen steigen oder fallen. Er könnte zu einem zukünftigen Zeitpunkt t mehr oder auch weniger als 1000 EUR kosten. Typischerweise wird sein Wert auch an den Zeitpunkten, an welchen ein Kupon ausgezahlt wird, springen.

Ein einfacheres Finanzprodukt wird die Systematik wesentlich erleichtern. Betrachten wir einen Bond, welcher keine Kuponzahlungen verspricht. Weiterhin normieren wir den Nennwert des Bonds auf 1. Dies führt zur folgenden

Definition 4.1.1. Ein *zero-coupon Bond* ist ein Finanzgut, welches zu einem fest vereinbarten Zeitpunkt (Maturity), sagen wir T, den Nennwert $N = 1$ zahlt. Den Preis eines solchen Bonds zum Zeitpunkt $t < T$ bezeichnen wir mit $B(t, T)$.

Eine Besonderheit von Bonds tritt hier gleich zu Tage, und zwar ist $B(T, T) = 1$ und (meistens) $B(t, T) < 1$. Solche Bonds eignen sich bereits hervorragend zur Beschreibung anderer Produkte, nämlich der Bonds mit Kupons. Angenommen, ein solcher Bond B^C zahlt die Kupons K_i zu den Zeitpunkten T_i, $i = 1, \ldots, n$ und das Nominal an T_n, so ist sein Wert zu einem Zeitpunkt $t < T_1$ gerade

$$B^C(t, T) = B(t, T_n) + \sum_{i=1}^{n} K_i B(t, T_i). \tag{4.1}$$

Aufgabe 1. Nehmen Sie an, Sie beobachten Bondpreise von Bonds, die an den Zeitpunkten $T_1, T_2, \ldots, T_n$ jeweils einen Kupon K zahlen, und zwar $B^C(t, T_1), \ldots, B^C(t, T_n)$. Bestimmen Sie daraus die Preise von zero-coupon Bonds $B(t, T_1), \ldots, B(t, T_n)$.

Möchte man nun die Dynamik von Bonds beschreiben, so erweist es sich als nützlich, nicht die Dynamik der Bonds direkt anzugehen, sondern sich (gemäß der Marktpraxis) solcher Größen zu bedienen, welche mehr Aussagekraft haben. Die Intuition, die man für diese Größen hat, führt dann zu besseren Modellen. Wir hatten bereits von einem Zins gesprochen. Ebenso spricht man ja von einer Zinskurve. Noch besser eignen sich *forward rates* zur Modellierung. Diese entstehen aus einer ganz einfachen Überlegung: Sei t die aktuelle Zeit. Möchte man einen gewissen Betrag in einem Zeitintervall $[T, S]$ in der Zukunft ($t < T < S$) investieren, so kann man bereits heute einen Zins dafür vereinbaren (die sogenannte forward rate).

Sie läßt sich leicht durch folgende Strategie bestimmen

- An t: Verkaufe $B(t, T)$ und kaufe dafür $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ Bonds mit Laufzeit S. (keine Kosten!)
- An T: Zahle 1 für den verkauften T-Bond.
- An S: Erhalte $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ als Rückzahlung aus den S-Bonds.

Das entsprechende Finanzprodukt heißt *Forward Rate Agreement* und verpflichtet den Käufer zur Zahlung von 1 EUR an T und zahlt ihm im Gegenzug einen (an t fixierten) Zins für diesen Zeitraum, was natürlich äquivalent zu einer Auszahlung von $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ an S sein muss, d.h. der Zins (sagen wir F) ist gerade bestimmt durch

$$1 + (S - T)\, F = \frac{B(t, T)}{B(t, S)}.$$

Definition 4.1.2. Dies führt zu einer Reihe von Definitionen:

- Die (diskrete) *forward rate* für den Zeitraum $[T, S]$ zur Zeit t ist

$$F(t; T, S) := \frac{1}{S - T} \left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)} - 1 \right).$$

- Der (diskrete) *Zins* für den Zeitraum $[t, T]$ ist

$$y(t, T) := F(t; t, T) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{1}{B(t, T)} - 1 \right).$$

Die hier benutzten Raten entsprechen den Marktgepflogenheiten, so nennt man den diskreten Zins auch oft market rate oder LIBOR (=London Inter Bank Offered Rate) rate. LIBOR rates werden für den Zeitraum über Nacht bis zu 12 Monaten gehandelt, siehe z.B. `http://www.bba.org.uk/bba/jsp/polopoly.jsp?d=141&a=627`. Benutzt man eine stetige Verzinsung R, so ist die Umrechnung zum diskreten Zins F jeweils

$$e^{R\,(S-T)} = 1 + F\,(S - T)$$

und wir erhalten analog

- Die (stetige) *forward rate* für $[T, S]$ an t ist

$$R(t; T, S) := -\frac{\ln B(t, S) - \ln B(t, T)}{S - T}.$$

- Die (stetige) *spot rate* für $[t,T]$ ist

$$R(t,T) := R(t;t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t}.$$

Nun möchte man nicht ständig mit unterschiedlichen Intervallen jonglieren. Dazu läßt man die Intervalllänge gegen Null gehen und erhält

- Die (instantaneous) forward rate für maturity T an t ist

$$f(t,T) = \lim_{S \downarrow T} R(t;T,S) = -\partial_T \ln B(t,T).$$

- Die (instantaneous) *short rate* an t ist

$$r(t) := f(t,t) = \lim_{t \downarrow T} R(t;T).$$

Im folgenden werden wir von der instantaneous forward rate als forward rate sprechen, ebenso steht short rate für r_t und mit einem Bond meinen wir typischerweise einen zero-coupon Bond. Aus obiger Definition ergibt sich sofort der Zusammenhang zwischen Bond und forward rate

$$B(t,T) = \exp\Big(-\int_t^T f(t,u)\,du \Big).$$

4.1.1 Das Bankkonto

Im Gegensatz zum Black-Scholes Modell haben wir es nun mit einem Markt zu tun, in dem Zinsen stochastisch sind. Das bisherige Bankkonto e^{rt} gehört somit der Vergangenheit an. Was kann man nun als Bankkonto benutzen? Investiert man zur Zeit t einen Euro für eine Zeit von der Länge Δt, so erhält man an $t+\Delta t$

$$\frac{1}{B(t,\Delta t)} = \exp\Big(\int_t^{t+\Delta t} f(t,u)\,du \Big) = 1 + f(t,t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Hat man zur Zeit t mit dieser Strategie $B(t)$ angespart, so wird daraus

$$B(t+\Delta t) = B(t)\frac{1}{B(t,\Delta t)} = B(t)\cdot\big(1 + r(t)\Delta t\big).$$

Für $\Delta t \to 0$ erhalten wir

$$dB(t) = r(t)B(t)\,dt.$$

Die Lösung dieser SDE ergibt wie erwartet

$$B(t) = \exp\Big(\int_0^t r(u)\,du \Big).$$

Man beachte, dass für $\Delta t \to 0$ in unendlich vielen Bonds gehandelt werden muss. Dies ist wesentlich trickreicher als obiges Argument vermuten läßt und wird in **?**) präzisiert.

4.1.2 Floating Rate Notes

Neben dem oben schon erwähnten Kupon Bond mit festen Kupons gibt es auch Vereinbarungen über die Zahlung eines variablen Zinssatzes. Die Zahlung wird zu jedem Zahlungszeitpunkt neu festgesetzt und orientiert sich an einem benchmark. So könnte der Kupon zur Zeit T_i ($i = 1, \dots, n$) aus der LIBOR rate für den vergangenen Zeitraum $[T_{i-1}, T_i]$ hervorgehen:

$$K_i = (T_i - T_{i-1}) L(T_{i-1}, T_i) \cdot K.$$

Überraschend ist, dass K_i erst an T_i gezahlt wird, dessen Höhe aber schon an T_{i-1} bekannt ist. Wir werden gleich sehen, wieso dass so ist. Für den Wert des Bonds diskontieren wir die zukünftigen Zahlungen wie bereits in (4.1) mit den Bondpreisen, allerdings gibt es hier eine Besonderheit: Der Kupon zur Zeit T_i ist zur Zeit t gar nicht bekannt! Man kann, mittels eines FRA, die verwendete LIBOR-Rate heute schon fixieren. Verwendet man diese in der Berechnung, so erhält man für $t \leq T_0$

$$\begin{aligned} B^{Fl}(t,T) &= B(t,T_n) + \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)(T_i - T_{i-1}) L(t; T_{i-1}, T_i) \cdot K \\ &= B(t,T_n) + \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i) \left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1 \right) \cdot K \\ &= B(t,T_n) + K \sum_{i=1}^{n} B(t,T_{i-1}) - B(t,T_i) = B(t,T_n)(1-K) + K B(t,T_0). \end{aligned}$$

Für $K = 1$ erhalten wir demnach $B^{Fl}(t,T) = B(t,T_0)$. Diese Floating Rate Note kann mit einer einfachen Handelsstrategie repliziert werden, was gerade ihre Attraktivität ausmacht. Auf dem gleichen Prinzip beruhen auch die im nächsten Kapitel folgenden Zins-swaps. Wir haben bei obiger Berechnung etwas schwammig argumentiert. Die replizierende Handelsstrategie stellt diese Argumentation jedoch auf solide Füße.

Aufgabe 2. Finden Sie die Handelsstrategie, die B^{Fl} repliziert.

4.1.3 Swaps

Ein Swap ist im Prinzip ein Tauschgeschäft. Bei den standardisierten Swaps wird eine feste Zinsrate gegen eine variable Zinsrate getauscht. Hauptsächlich gibt es zwei typische Swaps, einen *Payer* und einen *Receiver Swap*. Beim Payer Swap wird die feste Rate gezahlt, beim Receiver Swap gerade umgekehrt. Der Payer Swap ist demnach durch drei Dinge festgelegt

1. Die Zahlungszeitpunkte $T_1, \dots, T_n$,
2. die feste Rate K,
3. das Nominal N.

Der Einfachheit halber nehmen wir äquidistante Zahlungen an und setzen $\Delta := T_i - T_{i-1}$. Ähnlich wie bei den floating rate notes zahlt man die variable Zinsrate im Nachhinein (engl. „in arrears"). Damit zahlt der Inhaber des Payer Swaps an T_i ($i = 1, \dots, n$) gerade $K\Delta N$ und erhält gleichzeitig die LIBOR-Rate $L(T_{i-1}, T_i)\Delta N$.

Damit ist der Wert der gesamten Zahlung zur Zeit t, d.h. der Wert des Swaps zur Zeit t, wenn wir wieder die tatsächlich verwendete LIBOR-Rate durch ihr Äquivalent zur Zeit t ersetzen,

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)\Big(L(t;T_{i-1},T_i)\Delta N - K\Delta N\Big) \\ &= N\Big(B(t,T_0) - B(t,T_n) - \Delta K \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i).\Big) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Den Eintritt in einen Swap gestaltet man möglichst einfach, eben so, dass keine Zahlungen fällig sind, erst an T_1. Genau der Parameter K, für den der Swap den Wert Null hat, wird als feste Zahlung vereinbart. Man nennt dann K die *swap rate*

$$R_{swap}(t) = \frac{B(t,T_0) - B(t,T_n)}{\Delta \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)}.$$

Bemerkung 4.1.3. In den später behandelten Marktmodellen ist eine andere Darstellung der swap rate nützlich. Man verwendet direkt (4.2) und erhält

$$R_{swap}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(t,T_i)}{\sum_{j=1}^{n} B(t,T_j)} L(t;T_{i-1},T_i),$$

also ist die swap rate ein gewichtetes Mittel der forward rates mit Gewichten

$$w_i = \frac{B(t,T_i)}{\sum_{j=1}^{n} B(t,T_j)}.$$

4.1.4 Das Konzept der Duration

Durch den Kauf eines Bonds vereinbart man eigentlich einen gewissen Zins über einen Zeitraum. Sagen wir, der Bond hat den Preis $B(t,T)$ und zahlt keine Kupons, so geht der vereinbarte Zins aus

$$B(t,T) = e^{-y(T-t)} \cdot 1$$

hervor. Wir erhalten

Definition 4.1.4. Der (stetige) Null Kupon Zins ist definiert durch

$$y(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t}.$$

Die Kurve gegeben durch $T \mapsto y(t,T)$ nennt man die (Null Kupon) *Zinskurve* an t.

Zahlt ein Bond Kupons $K_1,\dots,K_n$ an $T_1,\dots,T_n$, so entspricht sein Preis $B^C(t,T)$ der *yield-to-maturitiy* y_m, wenn y_m die folgende Gleichung löst:

$$B^C(t,T_n) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{-y_m\,(T_i-t)} + e^{-y_m\,(T_n-t)}.$$

Definition 4.1.5. Für einen Kupon Bond mit yield-to-maturity y sei seine *Duration* definiert durch

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i-t)K_i e^{-y_m\,(T_i-t)} + (T_n-t)e^{-y_m\,(T_n-t)}}{B^C(t,T_n)}.$$

Die Duration ist ein gewichtetes Mittel der Auszahlungszeitpunkte des Bonds, was soviel bedeutet wie: Konzentrierte man alle Auszahlungen auf einen Zeitpunkt, so erhält man diese an $t + D$. Ihre besondere Bedeutung liegt in folgender Formel begründet:

$$\frac{\partial}{\partial y_m} B^C(t, T_n) = -D \cdot B^C(t, T_n).$$

Die Duration stellt somit die Sensitivität des Bonds in Bezug auf den Zins y_m dar (bzw. auf parallele Bewegungen in der Zinskurve), und spielt so die Rolle des Deltas bei Calls und Puts. Das Äquivalent zum Gamma nennt man *Konvexität*:

$$C = \frac{\partial^2 B^C(t, T_n)}{\partial y_m}.$$

Anhang A

Martingale in diskreter Zeit

A.1 Grundlagen

A.1.1 Bedingte Erwartungserte.

Wir wiederholen kurz den Begriff der bedingten Erwartung. Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mit $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Funktionen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$.

Definition A.1.1. Sei $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{B}$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Eine Zufallsvariable $z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt bedingte Erwartung von ξ gegeben $\mathcal{B}$, falls

i) z ist messbar bzgl. $\mathcal{B}$

ii) Für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt: $\displaystyle\int_B \xi \, d\mathbb{P} = \int_B z \, d\mathbb{P}$.

Wir setzen

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) := \Big\{ z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{B}) : z \text{ erfüllt i) und ii)} \Big\}$$

und schreiben für jedes solche z einfach $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$.

Beispiel A.1.2. Wirft man einen Würfel zweimal und bezeichnet das Ergebnis des jeweiligen Wurfs mit ξ_1 bzw. ξ_2, so ist $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2) = \mathbb{E}\left(\xi_1|\sigma(\xi_2)\right) = \mathbb{E}(\xi_1)$. Als Übungsaufgabe bestimme man $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_1 + \xi_2)$.

Wir fassen kurz einige **Rechenregeln** zusammen:

1. $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi|\theta)\big) = \mathbb{E}(\xi)$
2. *Positivität.* Für $\xi \geq 0$ folgt $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) \geq 0$
3. *Linearität.* Für $\mathcal{B}$-messbare ξ_1, ξ_2 gilt

$$\mathbb{E}(\xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2|\mathcal{B}) = \xi_1 \mathbb{E}(\eta_1|\mathcal{B}) + \xi_2 \mathbb{E}(\eta_2|\mathcal{B}).$$

4. *Unabhängigkeit.* Ist ξ unabhängig von $\mathcal{B}$, so ist

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\xi).$$

5. *Faktorisierung.* Ist $\mathcal{B} = \sigma(\eta)$, so schreiben wir kurz $\mathbb{E}(\xi|\eta) := \mathbb{E}(\xi|\sigma(\eta))$. Mann kann zeigen, dass $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ eine messbare Funktion von η ist, etwa $\mathbb{E}(\xi|\eta) = f(\eta)$. Diese Funktion f nennt man *Faktorisierung* und wir setzen

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = x) := f(x).$$

Ist ξ unabhängig von η, so gilt für jede messbare Funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dass

$$\mathbb{E}\left(T(\xi,\eta)|\eta = x\right) = \mathbb{E}\left(T(\xi,x)\right).$$

6. Für $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1\big) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}_1)$$

Diese Regeln übertragen sich unmittelbar auf d-dimensionale Zufallsvariablen.

A.1.2 Martingale

Als nächstes wenden wir uns den Martingalen zu. Sie stellen sehr wichtige Hilfsmittel für stochastische Prozesse dar. Zunächst benötigen wir ein Konzept für die anfallende Information, welches aus den so genannten *Filtrationen* besteht.

Betrachten wir eine Folge von Zufallsvariablen $S_1, S_2, \ldots$, so ist die zu einer Zeit n zur Verfügung stehende "Information´´ gegeben durch $\sigma(S_1, \ldots, S_n)$. Natürlich hat man zur Zeit $n+1$ mehr Information. Die Filtration greift diese Idee auf:

Definition A.1.3. Eine Folge von sub-σ-Algebren $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ heißt *Filtration*. Wir schreiben $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Definition A.1.4. Betrachte eine Filtration $\mathbb{F}$. Ist für jedes $n \geq 1$ $S_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und S_n $\mathcal{F}_n$-messbar, so sagen wir $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist an $\mathbb{F}$ *adaptiert*. Weiterhin heißt S ein

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\textbf{-Martingal}&, \text{ falls } \mathbb{E}(S_m|\mathcal{F}_n) = S_n\\
\mathbb{F}\textbf{-Submartingal}&, \text{ falls } \mathbb{E}(S_m|\mathcal{F}_n) \geq S_n\\
\mathbb{F}\textbf{-Supermartingal}&, \text{ falls } \mathbb{E}(S_m|\mathcal{F}_n) \leq S_n
\end{aligned}$$

für alle $m \geq n$ $\mathbb{P}-$fast sicher gilt.

Falls die Filtration fixiert ist, sprechen wir der Einfachheit halber schlicht von einem Martingal (ebenso natürlich für Super- und Submartingale). Für einen vorgegebenen stochastische Prozess S definiert man die *kanonische Filtration* $\mathbb{F}^S$ durch $\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_1, \ldots, S_n)$.

Bemerkung A.1.5. Ein Martingal ist also auch ein Super- und ein Submartingal. Ein Submartingal hat einen Aufwärtstrend, ein Supermartingal ein Abwärtstrend. Man beachte, dass S genau dann ein Submartingal ist, wenn $-S$ ein Supermartingal ist.

Beispiel A.1.6.

1. **Irrfahrt** (Random walk). Betrachte i.i.d. (unabhängige und identisch verteilte) ξ_i. Dann ist

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ein Martingal falls $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$. (Sub-/Super-Martingal für ≥ 0 bzw. ≤ 0) bzgl. der kanonischen Filtration $\mathbb{F}^S$.

2. Für $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine beliebige Filtration ist $S_n := \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$ stets ein Martingal. Ein Martingal, welches diese Eigenschaft besitzt nennt man reguläres Martingal.

Lemma A.1.7. *Sei S adaptiert an $\mathbb{F}$. Dann ist S ein $\mathbb{F}$-Submartingal* $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq S_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Beweis. Die Hinrichtung ist trivial. Für die Rückrichtung nutzen wir eine einfache Induktion über $p = m - n$. Der Fall $p = 1$ ist gerade durch obige Bedingung gegeben. Gelte also $\mathbb{E}(S_{n+p}|\mathcal{F}_n) \geq S_n$. Dann ist

$$\mathbb{E}(S_{n+p+1}|\mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(S_{n+p+1}|\mathcal{F}_{n+1}) \,\big|\mathcal{F}_n\big) \geq \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq S_n. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung A.1.8. Durch Übergang zu $-S$ erhält man eine entsprechende Aussage auch für Supermartingale und damit auch für Martingale.

Beispiel A.1.9.

1. Das **Cox-Ross-Rubinstein-Modell** (kurz CRR). Das CRR-Modell ergibt ein einfaches Modell für eine Aktie. Wir betrachten zunächst nur den 1-Perioden-Fall. Dabei ist ξ_1 eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(\xi_1 - n) = p$ und $\mathbb{P}(\xi_1 = \xi) = 1 - p$. Für den Aktienkurs setzen wir $S_1 = S_0 + \xi_1$. Oft schreibt man auch $\xi_1 = \Delta S_1$. Wir haben

   $$\mathbb{E}(S_1) = S_0 + \mathbb{E}(\xi_1)$$

   Für ein Mehrperiodenmodell möchte man gerne eine multiplikative Struktur und betrachtet $S_n = S_0 \cdot \Pi_{i=1}^n \xi_i$. Nehmen wir an, dass die ξ_i iid sind, so ist S_n ein Martingal (bezüglich der von ihm erzeugten σ-Algebra) genau dann, wenn $\mathbb{E}(\xi_1) = 1$.

   Beweis.

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n|S_{n-1,}\ldots,S_1) &= S_{n-1}\mathbb{E}(\xi_n|S_{n-1},\ldots,S_1)\\ &= S_{n-1}\mathbb{E}(\xi_n) = S_{n-1}.\end{aligned}$$ $\blacksquare$

2. Das **Black-Scholes Modell** in diskreter Zeit. Modelliert man ξ_i nicht diskret, sondern stetig, so bietet sich eine log-normalverteilung an (sie ist eine positive verteilung). Dann hat jedes ξ_i folgende Darstellung:

   $$\xi_i = \exp(m + \sigma \cdot \eta_i),$$

   wobei die η_n iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$ sind. Für ein Martingal benötigt man

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_1) = 1 &= \mathbb{E}(e^{m+\sigma\cdot\eta_1})\\ &= e^m \cdot \mathbb{E}(e^{\sigma\eta_1})\end{aligned}$$

   Der Erwartungswert ist gerade

   $$\int e^{\sigma x}\phi(x)\,dx,$$

   wobei $\phi(x) = \frac{l}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Dann gilt

   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{\sigma x - \frac{x^2}{2}}\,dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}}\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2\sigma x+\sigma^2}{2}}\,dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

   Wir erhalten also ein Martingal für $m = -\frac{\sigma^2}{2}$.

A.1.3 Diskrete stochastische Integrale.

Im Folgenden betrachten wir stets einen festen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Ein selbstfinanzierender Wertprozess wird die Gestalt

$$(\theta, S)_n := \sum_{i=1}^{n} \theta_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_i (S_i - S_{i-1}), \quad n \geq 1 \tag{A.1}$$

haben, wobei $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$. Hierbei ist $(S_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal und $(\theta_n)_{n\geq 1}$ *vorhersehbar* oder auch *previsibel*, d.h. θ_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar.

Lemma A.1.10. *Ist S ein Martingal und θ vorhersehbar, so ist der Prozess $((\theta, S)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal.*

Beweis. Zunächst folgt aus der Vorhersehbarkeit von θ, dass $\theta_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für alle $n \geq 1$. Wir setzen $I_n := (\theta, S)_n$. Zu zeigen ist $\mathbb{E}(I_{n+1}|\mathcal{F}_n) = I_n$. Dazu

$$\mathbb{E}(I_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i \Delta S_i \,\Big|\mathcal{F}_n\Big) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \Delta S_i + \mathbb{E}(\theta_{n+1}\Delta S_{n+1}|\mathcal{F}_n).$$

Nun ist θ_i vorhersehbar, also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\theta_{n+1}\Delta S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \theta_{n+1}\mathbb{E}(S_{n+1} - S_n|\mathcal{F}_n)\\ &= \theta_{n+1}\Big(\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) - S_n\Big) = 0.\end{aligned}$$ ■

Interessanterweise gilt auch die Umkehrung

Lemma A.1.11. *Eine adaptierte Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal, falls für jede beschränkte vorhersehbare Folge von Zufallsvariablen $(\theta_i)_{i\geq 1}$ gilt, dass*

$$\mathbb{E}\big((\theta, S)_n\big) = 0 \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Beweis. Wir zeigen $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n$. Nach der Definition des bedingten Erwartungswertes ist das gleichbedeutend mit

$$\int_F \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)\, d\mathbb{P} = \int_F S_n\, d\mathbb{P}, \qquad \forall\, F \in \mathcal{F}_n$$

also $\mathbb{E}(1_F S_{n+1}) = \mathbb{E}(1_F S_n)$. Wir haben also zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}\Big(1_F(S_{n+1} - S_n)\Big) = \mathbb{E}\big(1_F \Delta S_n\big) = 0. \tag{A.2}$$

Nun wähle $\theta_{n+1} = 1_F$ und $\theta_i = 0$ sonst. Natürlich ist (θ_n) vorhersehbar und beschränkt und des weiteren gilt (A.2). ■

A.2 Stoppzeiten und Optionales Stoppen

Definition A.2.1. Eine Zufallsvariable mit Werten in $N \cup \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** (bezgl. $\mathbb{F}$), falls

$$\{\tau \leq n\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n \qquad \forall\, n \leq \infty.$$

Wir nennen eine Stoppzeit τ beschränkt, falls es eine konstante K gibt, so dass $\mathbb{P}(\tau \leq K) = 1$.

Man zeigt leicht, dass τ genau dann eine Stoppzeit ist, wenn $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 1$.

Beispiel A.2.2.

1. $\tau = t$ mit einer Konstanten t. Jede deterministische Zeit ist also eine Stoppzeit.
2. Betrachte einen adaptierten Prozess $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann definiert man eine *Ersteintrittszeit* durch
$$\tau^B = \inf\{n \geq 0 : S_n \in B\}$$
für eine Borel-Menge B, beispielsweise $B = [a, \infty)$.

Satz A.2.3. *Für eine Stoppzeit τ mit $\mathbb{P}(\tau \leq K) = 1$ und ein Martingal $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:*

$$\mathbb{E}(|S_\tau|) < \infty \qquad \textit{und} \qquad \mathbb{E}(S_\tau) = \mathbb{E}(S_1).$$

Beweis. Wir betrachten die Zerlegung

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{K} 1_{\{\tau=k\}} S_\tau = \sum_{k=1}^{K} 1_{\{\tau=k\}} S_k.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_\tau) &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}(1_{\{\tau=k\}} S_k) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\Big(1_{\{\tau=k\}} \mathbb{E}(S_K|\mathcal{F}_k)\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(S_K \cdot \sum_{k=1}^{K} 1_{\{\tau=k\}}\Big) = \mathbb{E}(S_K) = \mathbb{E}(S_1)\end{aligned}$$

■

Aufgabe 3. Leiten Sie die entsprechenden Aussagen für Sub- bzw. Supermartingale her.

Wir benötigen auch ein Konzept für die Information an τ.

Definition A.2.4. Für eine Stoppzeit τ definieren wir

$$\mathcal{F}_\tau := \Big\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für alle } n\Big\}$$

Satz A.2.5. *Wir haben folgende Eigenschaften*

1. *$\mathcal{F}_\tau$ ist σ-Algebra*
2. *Für zwei Stoppzeiten τ, σ mit $\sigma \leq \tau$ ist $\mathcal{F}_\sigma \leq \mathcal{F}_\tau$.*
3. *Ist (X_n) adaptiert, so ist X_τ messbar bezüglich $\mathcal{F}_\tau$.*

Beweis. (1+2): siehe Bingham/Kiesel oder Übungsaufgabe.

Wir beweisen 3.) Dazu müssen wir für jedes Borelsche B zeigen, dass $\{X_\tau \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$. Also

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = k\} = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\{X_k \in B\}}_{\in\mathcal{F}_k} \cap \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in\mathcal{F}_k}$$

■

Das folgende Theorem von Doob nennt man Theorem über Optionales Stoppen oder auch *Optional Sampling Theorem.*

Theorem A.2.6. *Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und σ, τ zwei Stoppzeiten mit $\mathbb{P}(\sigma \leq K) = \mathbb{P}(\tau \leq K) = 1$ und $\sigma \leq \tau$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}(S_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = S_\sigma. \qquad f.s.$$

Beweis. Zunächst ist S_σ $\mathcal{F}_\sigma$-m.b. Und S_τ integrierbar, da

$$\mathbb{E}|S_\tau| = \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{K} 1_{\{\tau=k\}} S_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}|S_k| < \infty.$$

Wir zeigen für alle $F \in \mathcal{F}_\sigma$, dass

$$\int_F S_\tau d\mathbb{P} = \int_F S_\sigma d\mathbb{P}.$$

Wir schreiben $\bar{F} = \Omega \backslash F$. Definiere

$$\rho_F = \sigma 1_F + \tau 1_{\bar{F}}$$

Da $\{\rho_F \leq n\} = (F \cap \{\sigma \leq n\}) \cup (\bar{F} \cap \{\tau \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$ ist ρ_F wieder eine Stoppzeit und so

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(1_F S_\tau) = \mathbb{E}(1_F S_\sigma) \\ \Leftrightarrow \qquad & \mathbb{E}\big(1_F S_\tau + 1_{\bar{F}} S_\sigma\big) = \mathbb{E}\big(1_F S_\sigma + 1_{\bar{F}} S_\sigma\big) = \mathbb{E}(S_\sigma) \end{aligned}$$

Die linke Seite ist aber gerade $\mathbb{E}(S_{\rho_F})$. Nach Satz A.2.3 ist aber $\mathbb{E}(S_{\rho_F}) = \mathbb{E}(S_1) = \mathbb{E}(S_\sigma)$. ■

Man kann also die Martingaleigenschaft auch durch noch so geschicktes Stoppen nicht austricksen. Durch die Rückrichtung erhält man eine wichtige Charakterisierung von Martingalen.

Satz A.2.7. *Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine adaptierter Prozess mit $\mathbb{E}|S_n| < \infty$. Ist weiterhin $\mathbb{E}(S_\tau) = \mathbb{E}(S_1)$ für alle beschränkte Stoppzeiten τ, so ist S ein Martingal.*

Beweis. Betrachte $m \geq n$ und $F \in \mathcal{F}_m$. Wir zeigen

$$\mathbb{E}(S_m 1_F) = \mathbb{E}(S_n 1_F).$$

Wieder können wir eine geeignete Stoppzeit definieren, und zwar

$$\rho_F := m 1_F + n 1_{\bar{F}}.$$

Dann ist ρ_F eine Stoppzeit! Obige Gleichung ist äquivalent zu

$$\mathbb{E}(S_m 1_F + S_n 1_{\bar{F}}) = \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(S_1).$$

Die linke Seite ist aber gerade $\mathbb{E}(S_{\rho_F}) = \mathbb{E}(S_1)$. ■

Ein gestopptes Martingal ist wieder ein Martingal.

Satz A.2.8. *Ist $(S_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal, so ist $(S_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_n)$ wieder ein Martingal.*

Beweis. $\tau \wedge n$ ist eine Stoppzeit, also ist nach Satz A.2.5 $S_{\tau\wedge n}$ adaptiert.

Sei $m \geq n$. Wir unterscheiden $\{\tau > n\}$ und $\{\tau \leq n\}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{\tau\wedge m}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\Big(1_{\{\tau\leq n\}} S_\tau + 1_{\{\tau>n\}} S_{\tau\wedge m}|\mathcal{F}_n\Big) \\ &= 1_{\{\tau\leq n\}} S_\tau + \mathbb{E}\big(1_{\{\tau>n\}} S_{\tau\wedge m}|\mathcal{F}_n\big) \end{aligned}$$

Definiere

$$\rho_n := 1_{\{\tau>n\}}\tau \wedge m + n1_{\{\tau\leq n\}}.$$

Dann ist ρ_n eine Stoppzeit und $\rho_n \geq n$, also $\mathbb{E}(S_{\rho_n}|\mathcal{F}_n) = S_n$ und deswegen

$$\mathbb{E}\Big(1_{\{\tau>n\}}S_{\tau\wedge m} + 1_{\{\tau\leq n\}}S_n - 1_{\{\tau\leq n\}}S_n \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big) = \mathbb{E}(S_{\rho_n}|\mathcal{F}_n) - 1_{\{\tau\leq n\}}S_n = 1_{\{\tau>n\}}S_n.$$

Zusammenfassend folgt $\mathbb{E}(S_{\tau\wedge m}|\mathcal{F}_n) = S_{\tau\wedge n}$. ■

A.3 Doob-Zerlegung und Supermartingale

Im folgenden betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz A.3.1. *Sei X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine Folge von integrierbaren, adaptierten Zufallsvariablen. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Zerlegung von X_n der Form*

$$X_n = M_n + A_n, \text{ wobei} \tag{A.3}$$

1. *$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und*
2. *$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein previsibler Prozess mit $A_0 = 0$ ist.*

Die Zerlegung ist induktiv gegeben durch

$$A_0 = 0, \quad A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n). \tag{A.4}$$

Bemerkung. Diese Zerlegung heißt *Doob-Zerlegung* von X_n. Man sieht leicht, dass

$$M_n = M_{n-1} + X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}.$$

Beweis: Eindeutigkeit. Sei $X_n = M_n + A_n$ eine solche Zerlegung, dann folgt
$E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = E(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) + E(A_{n+1} - A_n \mid \mathcal{F}_n) = 0 + A_{n+1} - A_n$, so dass A_{n+1} für gegebenes A_n eindeutig bestimmt ist und somit auch M_{n+1}.
Existenz. Der Kandidat für A_n ist previsibel. Außerdem gilt für $M_n := X_n - A_n$ durch Anwenden von (A.4)

$$M_{n+1} - M_n = X_{n+1} - X_n - (A_{n+1} - A_n) = X_{n+1} - X_n - \Big(A_n + E(X_{n+1} - X_n \,|\mathcal{F}_n\,) - A_n\Big)$$

und somit $E(M_{n+1} - M_n \,|\mathcal{F}_n\,) = E(X_{n+1} - X_n \,|\mathcal{F}_n\,) - E(X_{n+1} - X_n \,|\mathcal{F}_n\,) = 0$. ■

Folgerung. Ein adaptierter, integrabler Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Supermartingal (Submartingal) genau dann, wenn der Prozess $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus der Doob-Zerlegung monoton fallend (wachsend) ist.

Folgerung (Stoppsatz für Supermartingale). Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal und τ eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt

$$X_0 \geq E(X_\tau). \tag{A.5}$$

Beweis: Sei $X_n = M_n + A_n$, die Doob-Zerlegung des Supermartingals X_n; dabei ist A_n monoton fallend, es gilt also $A_\tau \leq A_0 = 0$. Nach dem Stoppsatz gilt $E(M_\tau) = M_0$, es folgt

$$E(X_\tau) = E(M_\tau) + E(A_\tau) \leq E(M_\tau) = M_0 = X_0.$$

■

Literatur

Bertsekas, D. (1999), *Nonlinear Programming*, 2nd edn, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.

Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J. (1997), *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.

Bingham, N. & Kiesel, R. (2004), *Risk-neutral Valuation*, 2nd edn, Springer.

Björk, T., Di Masi, G. B., Kabanov, Y. & Runggaldier, W. J. (1997), 'Towards a general theory of bond markets', *Finance and Stochastics* pp. 141–174.

Delbaen, F. & Schachermayer, W. (2006), *The Mathematics of Arbitrage*, Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.

Föllmer, H. & Schied, A. (2004), *Stochastic Finance An Introduction in Discrete Time*, 2nd edn, Walter de Gruyter, Berlin New York.

Pliska, S. (1997), *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell.

Shreve, S. (2004), *Stochastic Calculus for Finance I*, Springer, New York.

Werner, D. (2000), *Funktionalanalysis*, Springer.