Konstruktion von Rechnungsgrundlagen erster Ordnung

Marcus C. Christiansen
Karlsruher Institut für Technologie, D-76133 Karlsruhe

WU Wien, 25. Juni 2010

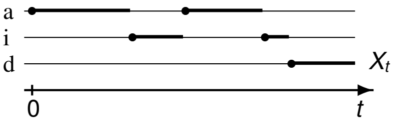
Risiken in der Personenversicherung

Zeitpunkt und Höhe zukünftiger Zahlungsverpflichtungen hängen ab vom ...

Risiken in der Personenversicherung

Zeitpunkt und Höhe zukünftiger Zahlungsverpflichtungen hängen ab vom ...

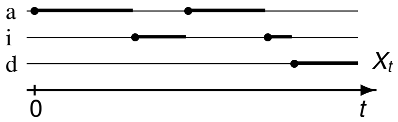
(a) Zustandsverlauf (X_t) des Policeninhabers



Risiken in der Personenversicherung

Zeitpunkt und Höhe zukünftiger Zahlungsverpflichtungen hängen ab vom ...

(a) Zustandsverlauf (X_t) des Policeninhabers



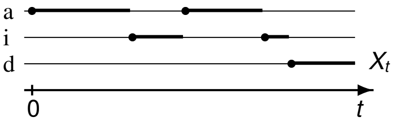
→ biometrisches Risiko:

- biometrisches Zufallsrisiko (diversifizierbar)

Risiken in der Personenversicherung

Zeitpunkt und Höhe zukünftiger Zahlungsverpflichtungen hängen ab vom ...

(a) Zustandsverlauf (X_t) des Policeninhabers



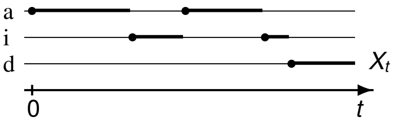
$\rightarrow$ biometrisches Risiko:

- biometrisches Zufallsrisiko (diversifizierbar)
- biometrisches Änderungsrisiko (nicht diversifizierbar)

Risiken in der Personenversicherung

Zeitpunkt und Höhe zukünftiger Zahlungsverpflichtungen hängen ab vom ...

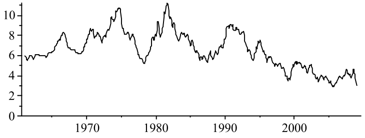
(a) Zustandsverlauf (X_t) des Policeninhabers



$\rightarrow$ biometrisches Risiko:

- biometrisches Zufallsrisiko (diversifizierbar)
- biometrisches Änderungsrisiko (nicht diversifizierbar)

(b) Kapitalertrag / Diskontierungsfaktor $v(0, t)$



$\rightarrow$ Zinsrisiko (nicht diversifizierbar)

Rechnungsgrundlagen: Aktiv-Tod-Modell

HIER nur Zustände a=aktiv und d=tod

Lebensdauer $T := \inf\{t | X_t = a\}$ statt Zustandsverlauf (X_t)

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung für T bzw. (X_t)

Rechnungsgrundlagen: Aktiv-Tod-Modell

HIER nur Zustände a=aktiv und d=tod

Lebensdauer $T := \inf\{t | X_t = a\}$ statt Zustandsverlauf (X_t)

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung für T bzw. (X_t)
   - Survivalfunktion

$$S_s(t) = P(T > t | T > s) = P(X_t = a | X_s = a)$$

Rechnungsgrundlagen: Aktiv-Tod-Modell

HIER nur Zustände a=aktiv und d=tod

Lebensdauer $T := \inf\{t | X_t = a\}$ statt Zustandsverlauf (X_t)

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung für T bzw. (X_t)
   - Survivalfunktion
   $$S_s(t) = P(T > t | T > s) = P(X_t = a | X_s = a)$$
   - Hazardrate / Sterbeintensität
   $$\lambda(t) = \frac{-S_s'(t)}{S_s(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S_s(t) = -\frac{d}{dt} \ln S_0(t)$$

Rechnungsgrundlagen: Aktiv-Tod-Modell

HIER nur Zustände a=aktiv und d=tod

Lebensdauer $T := \inf\{t | X_t = a\}$ statt Zustandsverlauf (X_t)

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung für T bzw. (X_t)
   - Survivalfunktion
   $$S_s(t) = P(T > t | T > s) = P(X_t = a | X_s = a)$$
   - Hazardrate / Sterbeintensität
   $$\lambda(t) = \frac{-S_s'(t)}{S_s(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S_s(t) = -\frac{d}{dt} \ln S_0(t)$$
2. Kapitalertrag

Rechnungsgrundlagen: Aktiv-Tod-Modell

HIER nur Zustände a=aktiv und d=tod

Lebensdauer $T := \inf\{t | X_t = a\}$ statt Zustandsverlauf (X_t)

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung für T bzw. (X_t)
   - Survivalfunktion
     $$S_s(t) = P(T > t | T > s) = P(X_t = a | X_s = a)$$
   - Hazardrate / Sterbeintensität
     $$\lambda(t) = \frac{-S_s'(t)}{S_s(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S_s(t) = -\frac{d}{dt} \ln S_0(t)$$
2. Kapitalertrag
   - Diskontierungsfunktion
     $$v(s,t) = \text{ Wert zur Zeit } s \text{ einer Zahlung zur Zeit } t$$

Rechnungsgrundlagen: Aktiv-Tod-Modell

HIER nur Zustände a=aktiv und d=tod

Lebensdauer $T := \inf\{t | X_t = a\}$ statt Zustandsverlauf (X_t)

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung für T bzw. (X_t)
   - Survivalfunktion
     $$S_s(t) = P(T > t | T > s) = P(X_t = a | X_s = a)$$
   - Hazardrate / Sterbeintensität
     $$\lambda(t) = \frac{-S_s'(t)}{S_s(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S_s(t) = -\frac{d}{dt} \ln S_0(t)$$
2. Kapitalertrag
   - Diskontierungsfunktion
     $$v(s, t) = \text{ Wert zur Zeit } s \text{ einer Zahlung zur Zeit } t$$
   - Hazardrate / Zinsintensität
     $$\varphi(t) = -\frac{d}{dt} \ln v(s, t) = -\frac{d}{dt} \ln v(0, t)$$

Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung

Ein zu Beginn 30-jähriger Versicherungsnehmer ...

- zahlt eine jährliche Prämie konstanter Höhe bis zum Rentenbeginn im Alter 65,

Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung

Ein zu Beginn 30-jähriger Versicherungsnehmer ...

- zahlt eine jährliche Prämie konstanter Höhe bis zum Rentenbeginn im Alter 65,
- erhält ab dem Alter 65 jährlich eine Rente konstanter Höhe bis zum Tod.

Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung

Ein zu Beginn 30-jähriger Versicherungsnehmer ...

- zahlt eine jährliche Prämie konstanter Höhe bis zum Rentenbeginn im Alter 65,
- erhält ab dem Alter 65 jährlich eine Rente konstanter Höhe bis zum Tod.
- Eine Todesfallleistung wird gezahlt bei Ableben vor dem Alter 85.

Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung

Ein zu Beginn 30-jähriger Versicherungsnehmer ...

- zahlt eine jährliche Prämie konstanter Höhe bis zum Rentenbeginn im Alter 65,
- erhält ab dem Alter 65 jährlich eine Rente konstanter Höhe bis zum Tod.
- Eine Todesfallleistung wird gezahlt bei Ableben vor dem Alter 85.

Wahl der Rechnungsgrundlagen auf der sicheren Seite:

1. Wahl der Survivalfunktion $S_s(t)$ / Sterbeintensität $\lambda(t)$?

Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung

Ein zu Beginn 30-jähriger Versicherungsnehmer ...

- zahlt eine jährliche Prämie konstanter Höhe bis zum Rentenbeginn im Alter 65,
- erhält ab dem Alter 65 jährlich eine Rente konstanter Höhe bis zum Tod.
- Eine Todesfallleistung wird gezahlt bei Ableben vor dem Alter 85.

Wahl der Rechnungsgrundlagen auf der sicheren Seite:

1. Wahl der Survivalfunktion $S_s(t)$ / Sterbeintensität $\lambda(t)$?
2. Wahl der Diskontierungsfunkt. $v(s,t)$ / Zinsintensität $\varphi(t)$?

Mathematische

Modellierung

Aktiv-Tod-Modell

Zahlungen zwischen Versicherer und Policeninhaber:

1. Prämien

$$\Pi : [0, \omega] \to [0, \infty)$$

kumulative Definition: $\Pi(t)$ ist die kumulierte Prämie für den Zeitraum $[0, t]$

Aktiv-Tod-Modell

Zahlungen zwischen Versicherer und Policeninhaber:

1. Prämien

$$\Pi : [0, \omega] \to [0, \infty)$$

   kumulative Definition: $\Pi(t)$ ist die kumulierte Prämie für den Zeitraum $[0, t]$

2. Überlebensfallleistung / Rente

$$B : [0, \omega] \to [0, \infty)$$

   kumulative Definition: $B(t)$ ist die kumulierte Überlensfallleistung für den Zeitraum $[0, t]$

Aktiv-Tod-Modell

Zahlungen zwischen Versicherer und Policeninhaber:

1. Prämien

$$\Pi : [0, \omega] \to [0, \infty)$$

kumulative Definition: $\Pi(t)$ ist die kumulierte Prämie für den Zeitraum $[0, t]$

2. Überlebensfallleistung / Rente

$$B : [0, \omega] \to [0, \infty)$$

kumulative Definition: $B(t)$ ist die kumulierte Überlensfallleistung für den Zeitraum $[0, t]$

3. Todesfallleistung

$$c : [0, \omega] \to [0, \infty)$$

bei Ableben zum Zeitpunkt t wird der Betrag $c(t)$ ausbezahlt

Prospektive Reserve

Barwert zukünftiger Zahlungen zur Zeit s

$$BW(s) := \int_{(s,\omega]} v(s,t)\,\mathbf{1}_{T>t}\,d(B-\Pi)(t) + v(s,T)\,c(T)\,\mathbf{1}_{T>s}$$

Prospektive Reserve

Barwert zukünftiger Zahlungen zur Zeit s

$$BW(s) := \int_{(s,\omega]} v(s,t)\,\mathbf{1}_{T>t}\,d(B-\Pi)(t) + v(s,T)\,c(T)\,\mathbf{1}_{T>s}$$

prospektive Reserve zur Zeit s

$$\begin{aligned} V(s) := \mathbb{E}(BW(s)|T>s) = &\int_{(s,\omega]} v(s,t)\,S_s(t)\,d(B-\Pi)(s) \\ &- \int_{(s,\omega]} v(s,t)\,c(t)\,dS_s(t) \end{aligned}$$

Prospektive Reserve

Barwert zukünftiger Zahlungen zur Zeit s

$$BW(s) := \int_{(s,\omega]} v(s,t)\,\mathbf{1}_{T>t}\,d(B-\Pi)(t) + v(s,T)\,c(T)\,\mathbf{1}_{T>s}$$

prospektive Reserve zur Zeit s

$$\begin{aligned} V(s) := \mathbb{E}(BW(s)|T>s) &= \int_{(s,\omega]} v(s,t)\,S_s(t)\,d(B-\Pi)(s) \\ &\quad - \int_{(s,\omega]} v(s,t)\,c(t)\,dS_s(t) \end{aligned}$$

FRAGE Für welche $v(s,\cdot)$ und $S_s(\cdot)$ wird $V(s)$ maximal ?

Konfidenzbänder für Rechnungsgrundlagen

Mit hoher Wahrscheinlichkeit (z.B. $99,5\%$) seien $\lambda(t)$ und $\varphi(t)$ beschränkt durch ...

1. Konfidenzband für Sterbeintensität

$$L_\lambda(t) \leq \lambda(t) \leq U_\lambda(t)$$

   z.B. Lee-Carter Modell, Expertenmeinung, ...

Konfidenzbänder für Rechnungsgrundlagen

Mit hoher Wahrscheinlichkeit (z.B. $99,5\%$) seien $\lambda(t)$ und $\varphi(t)$ beschränkt durch ...

1. Konfidenzband für Sterbeintensität

$$L_\lambda(t) \leq \lambda(t) \leq U_\lambda(t)$$

   z.B. Lee-Carter Modell, Expertenmeinung, ...

2. Konfidenzband für Zinsintensität

$$L_\varphi(t) \leq \varphi(t) \leq U_\varphi(t)$$

   z.B. Ornstein-Uhlenbeck Modell, Expertenmeinung, ...

Optimierungsproblem

Worst-Case Rechnungsgrundlagen

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s; \overline{\lambda}, \overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \le \lambda \le U_\lambda \\ L_\varphi \le \varphi \le U_\varphi}} V(s; \lambda, \varphi)$$

Worst-Case Rechnungsgrundlagen

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \leq \lambda \leq U_\lambda \\ L_\varphi \leq \varphi \leq U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

BISHER Lidstone (1905), Norberg (1985), Hoem (1988), Ramlau-Hansen (1988), Linnemann (1993), ...

$$V(s;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) \geq V(s;\lambda,\varphi)$$

$$\text{falls} \quad \operatorname{sign}\big(\widetilde{\lambda}(t) - \lambda(t)\big) = \operatorname{sign}\big(c(t) - V(t-;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big)$$

$$\text{und} \quad \operatorname{sign}\big(\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\big) = -\operatorname{sign}\big(V(t;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big)$$

Worst-Case Rechnungsgrundlagen

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

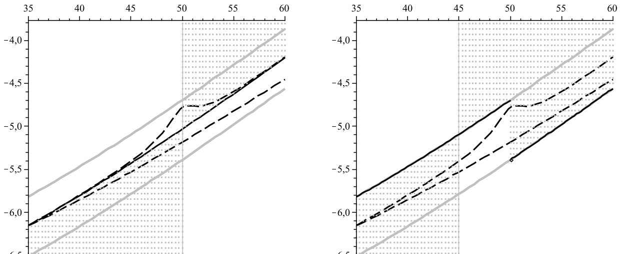
$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda\leq\lambda\leq U_\lambda\\ L_\varphi\leq\varphi\leq U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

BISHER Lidstone (1905), Norberg (1985), Hoem (1988), Ramlau-Hansen (1988), Linnemann (1993), ...

$$V(s;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) \geq V(s;\lambda,\varphi)$$

$$\text{falls}\quad \operatorname{sign}\big(\widetilde{\lambda}(t)-\lambda(t)\big) = \operatorname{sign}\big(c(t)-V(t-;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big)$$

$$\text{und}\quad \operatorname{sign}\big(\widetilde{\varphi}(t)-\varphi(t)\big) = -\operatorname{sign}\big(V(t;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big)$$



Worst-Case Rechnungsgrundlagen

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

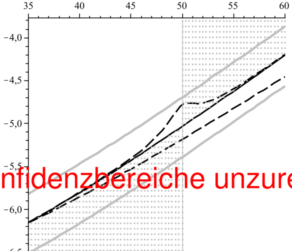
$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \le \lambda \le U_\lambda \\ L_\varphi \le \varphi \le U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

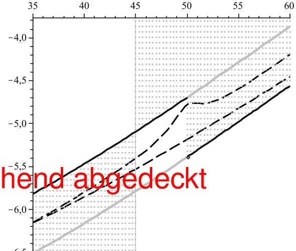
BISHER Lidstone (1905), Norberg (1985), Hoem (1988), Ramlau-Hansen (1988), Linnemann (1993), ...

$$V(s;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) \ge V(s;\lambda,\varphi)$$

$$\text{falls} \quad \operatorname{sign}\big(\widetilde{\lambda}(t)-\lambda(t)\big) = \operatorname{sign}\big(c(t) - V(t-;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big)$$

$$\text{und} \quad \operatorname{sign}\big(\widetilde{\varphi}(t)-\varphi(t)\big) = -\operatorname{sign}\big(V(t;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big)$$





Konfidenzbereiche unzureichend abgedeckt

Worst-Case Rechnungsgrundlagen II

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \leq \lambda \leq U_\lambda \\ L_\varphi \leq \varphi \leq U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

Worst-Case Rechnungsgrundlagen II

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s; \overline{\lambda}, \overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \leq \lambda \leq U_\lambda \\ L_\varphi \leq \varphi \leq U_\varphi}} V(s; \lambda, \varphi)$$

ANSATZ 1 C. (2008)
lokale Linearisierung von $(\lambda, \varphi) \mapsto V(s; \lambda, \varphi)$

$$V(s; \lambda, \varphi) \simeq V(s; \widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi}) + \int (\nabla_{(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi})} V(s))(t) \cdot (\lambda - \widetilde{\lambda}, \varphi - \widetilde{\varphi})(t)\, dt$$

EXKURS: Verallgemeinerte Gradienten

Charakteristische Eigenschaft von Gradienten:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(x+th) = < \nabla_x F, h >$$

EXKURS: Verallgemeinerte Gradienten

Charakteristische Eigenschaft von Gradienten:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(x+th) = < \nabla_x F, h >$$

Ansatz für Funktional F auf $L_1(\nu)$:
(siehe Courant und Hilbert, 1968)

$$D_x F(h) = \int \nabla_x F\, h\, d\nu$$

EXKURS: Verallgemeinerte Gradienten

Charakteristische Eigenschaft von Gradienten:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(x+th) = < \nabla_x F, h >$$

Ansatz für Funktional F auf $L_1(\nu)$:
(siehe Courant und Hilbert, 1968)

$$D_x F(h) = \int \nabla_x F \, h \, d\nu$$

Ansatz für Funktional F auf $BV_{\leftarrow}$ (C., 2008):
(ähnlich zu Ansätzen in der nichtparametrischen, lokal asymptotischen Statistik)

$$D_X F(H) = \int \nabla_X F \, dH$$

Worst-Case Rechnungsgrundlagen II

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \le \lambda \le U_\lambda \\ L_\varphi \le \varphi \le U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

ANSATZ 1 C. (2008)
lokale Linearisierung von $(\lambda,\varphi) \mapsto V(s;\lambda,\varphi)$

$$V(s;\lambda,\varphi) \simeq V(s;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) + \int (\nabla_{(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})} V(s))(t) \cdot (\lambda - \widetilde{\lambda}, \varphi - \widetilde{\varphi})(t)\, dt$$

Worst-Case Rechnungsgrundlagen II

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \le \lambda \le U_\lambda \\ L_\varphi \le \varphi \le U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

ANSATZ 1 C. (2008)
lokale Linearisierung von $(\lambda,\varphi) \mapsto V(s;\lambda,\varphi)$

$$V(s;\lambda,\varphi) \simeq V(s;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) + \int (\nabla_{(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})} V(s))(t) \cdot (\lambda - \widetilde{\lambda}, \varphi - \widetilde{\varphi})(t)\, dt$$

geeignet für schmale Konfidenzbänder

Worst-Case Rechnungsgrundlagen II

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \leq \lambda \leq U_\lambda \\ L_\varphi \leq \varphi \leq U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

ANSATZ 1 C. (2008)
lokale Linearisierung von $(\lambda,\varphi) \mapsto V(s;\lambda,\varphi)$

$$V(s;\lambda,\varphi) \simeq V(s;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) + \int (\nabla_{(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})} V(s))(t) \cdot (\lambda-\widetilde{\lambda},\varphi-\widetilde{\varphi})(t)\,dt$$

geeignet für schmale Konfidenzbänder

ANSATZ 1b C. & Denuit (2009)
Iteration von Ansatz 1: Gradienten-Anstiegs-Methode

Worst-Case Rechnungsgrundlagen II

Gesucht sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\varphi}$ mit

$$V(s;\overline{\lambda},\overline{\varphi}) = \max_{\substack{L_\lambda \le \lambda \le U_\lambda \\ L_\varphi \le \varphi \le U_\varphi}} V(s;\lambda,\varphi)$$

ANSATZ 1 C. (2008)
lokale Linearisierung von $(\lambda,\varphi) \mapsto V(s;\lambda,\varphi)$

$$V(s;\lambda,\varphi) \simeq V(s;\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) + \int (\nabla_{(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})} V(s))(t) \cdot (\lambda - \widetilde{\lambda}, \varphi - \widetilde{\varphi})(t)\, dt$$

geeignet für schmale Konfidenzbänder

ANSATZ 1b C. & Denuit (2009)
Iteration von Ansatz 1: Gradienten-Anstiegs-Methode
globales oder nur lokales Maximum ?

Worst-Case Rechnungsgrundlagen III

ANSATZ 2 C. (2010)

Dynamische Programmierung:

Worst-Case Rechnungsgrundlagen III

ANSATZ 2 C. (2010)

Dynamische Programmierung: Schreibe die bekannte Thiele'sche Integralgleichung

$$V(s) = \int_{(s,\omega]} d(B-\Pi)(t) - \int_{(s,\omega]} V(t-)\,\varphi(t)\,dt + \int_{(s,\omega]} (c(t) - V(t-))\,\lambda(t)\,dt\,, \quad V(\omega) = 0$$

als

Worst-Case Rechnungsgrundlagen III

ANSATZ 2 C. (2010)

Dynamische Programmierung: Schreibe die bekannte Thiele'sche Integralgleichung

$$V(s) = \int_{(s,\omega]} d(B - \Pi)(t) - \int_{(s,\omega]} V(t-)\,\varphi(t)\,dt + \int_{(s,\omega]} (c(t) - V(t-))\,\lambda(t)\,dt\,, \quad V(\omega) = 0$$

als Bellman-Gleichung

$$V(s) = \int_{(s,\omega]} d(B - \Pi)(t) - \int_{(s,\omega]} \max_{L_\varphi(t) \le \varphi(t) \le U_\varphi(t)} V(t-)\,\varphi(t)\,dt + \int_{(s,\omega]} \max_{L_\lambda(t) \le \lambda(t) \le U_\lambda(t)} (c(t) - V(t-))\,\lambda(t)\,dt\,, \quad V(\omega) = 0$$

Worst-Case Rechnungsgrundlagen III

ANSATZ 2 C. (2010)

Dynamische Programmierung: Schreibe die bekannte Thiele'sche Integralgleichung

$$V(s) = \int_{(s,\omega]} d(B-\Pi)(t) - \int_{(s,\omega]} V(t-)\,\varphi(t)\,dt + \int_{(s,\omega]} (c(t) - V(t-))\,\lambda(t)\,dt\,, \quad V(\omega) = 0$$

als Bellman-Gleichung

$$V(s) = \int_{(s,\omega]} d(B-\Pi)(t) - \int_{(s,\omega]} \max_{L_\varphi(t) \le \varphi(t) \le U_\varphi(t)} V(t-)\,\varphi(t)\,dt + \int_{(s,\omega]} \max_{L_\lambda(t) \le \lambda(t) \le U_\lambda(t)} (c(t) - V(t-))\,\lambda(t)\,dt\,, \quad V(\omega) = 0$$

Worst-Case Integralgleichung

Worst-Case Rechnungsgrundlagen III

Theorem (C., 2010)

Die Worst-Case Integralgleichung hat genau eine Lösung $\overline{V}$, welche auf dem gesamten Zeitbereich maximal ist. Zu jeder Lösung $\overline{V}$ gibt es mindestens ein Szenario $(\overline{\lambda}, \overline{\varphi})$ welches die Lösung erzeugt, d.h. $\overline{V}(t) = V(t; \overline{\lambda}, \overline{\varphi})$.

Worst-Case Rechnungsgrundlagen III

Theorem (C., 2010)

Die Worst-Case Integralgleichung hat genau eine Lösung $\overline{V}$*, welche auf dem gesamten Zeitbereich maximal ist. Zu jeder Lösung* $\overline{V}$ *gibt es mindestens ein Szenario* $(\overline{\lambda}, \overline{\varphi})$ *welches die Lösung erzeugt, d.h.* $\overline{V}(t) = V(t; \overline{\lambda}, \overline{\varphi})$.

- Existenz und Eindeutigkeit der Lösung: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ähnlich zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöff.

Worst-Case Rechnungsgrundlagen III

Theorem (C., 2010)

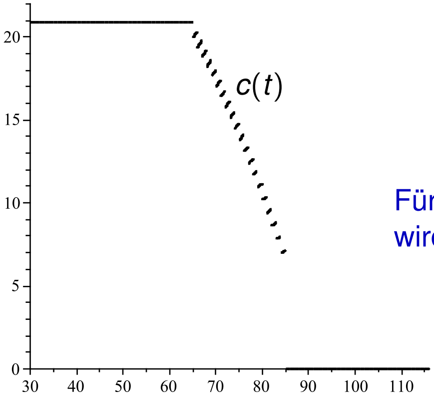
Die Worst-Case Integralgleichung hat genau eine Lösung $\overline{V}$, welche auf dem gesamten Zeitbereich maximal ist. Zu jeder Lösung $\overline{V}$ gibt es mindestens ein Szenario $(\overline{\lambda}, \overline{\varphi})$ welches die Lösung erzeugt, d.h. $\overline{V}(t) = V(t; \overline{\lambda}, \overline{\varphi})$.

- Existenz und Eindeutigkeit der Lösung: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ähnlich zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöff.
- Maximalität: Einsetzen von $(\overline{\lambda}, \overline{\varphi})$ in die Surplus-Formel.

Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung

Ein zu Beginn 30-jähriger Versicherungsnehmer ...

$$\Pi(t) = 413.38 \cdot \sum_{k=30}^{64} \mathbf{1}_{[k,\infty)}(t)\,, \quad B(t) = 1000 \cdot \sum_{k=65}^{\omega} \mathbf{1}_{[k,\infty)}(t)$$

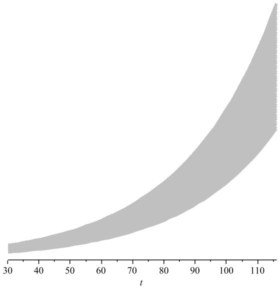


Für welches Szenario (λ, φ) wird $V(30; \lambda, \varphi)$ maximal ?

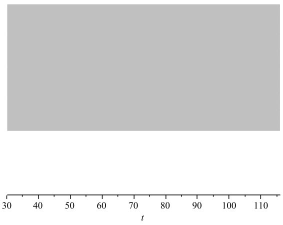
Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung II

$$(\overline{\lambda}, \overline{\varphi}) = \arg\max \left\{ V(30; \lambda, \varphi) \middle| L_\lambda \leq \lambda \leq U_\lambda, L_\varphi \leq \varphi \leq U_\varphi \right\}$$

Sterbeintensität $\lambda(t)$



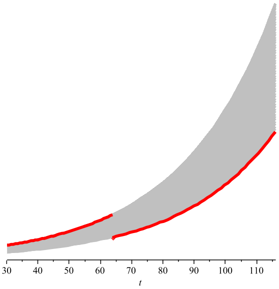
Zinsintensität $\varphi(t)$



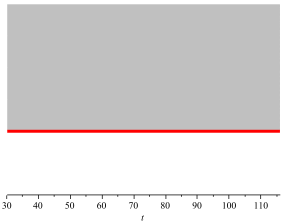
Beispiel: Rentenversicherung mit Todesfallleistung II

$$(\overline{\lambda}, \overline{\varphi}) = \arg\max \Big\{ V(30; \lambda, \varphi) \Big| L_\lambda \leq \lambda \leq U_\lambda, L_\varphi \leq \varphi \leq U_\varphi \Big\}$$

Sterbeintensität $\lambda(t)$



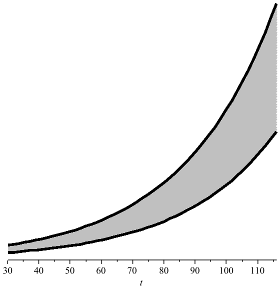
Zinsintensität $\varphi(t)$



Solvency II

Solvenzkapitalanforderung (SCR) für Sterblichkeitsänderungsrisiko:

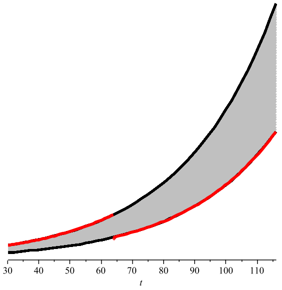
'change of assets and liabilities under the mortality scenarios $+15\%$ *above and* -25% *below the best estimate'*



Solvency II

Solvenzkapitalanforderung (SCR) für Sterblichkeitsänderungsrisiko:

'change of assets and liabilities under the mortality scenarios $+15\%$ *above and* -25% *below the best estimate'*



Risiko unterschätzt bei gemischten Versicherungen

Vorschlag verwenden von Worst-Case Szenarien

Vergleich der unterschiedlichen Methoden

Rechnungsgrundlagen	Prospektive Reserve $V(30-)$
Best Estimate	0.00
Untere Konfidenzgrenze	9.74
Obere Konfidenzgrenze	-3.09
Aufspaltung der Police	299.77
Worst-Case Methode	81.86
Alternative Worst-Case Methode	58.31
Sum-at-Risk Methode	79.85

Ausblick

- Abhängigkeiten (Korrelation von Zins und Sterblichkeit, Korrelation von Sterblichkeit und Gesundheitszustand, ...)

Ausblick

- Abhängigkeiten (Korrelation von Zins und Sterblichkeit, Korrelation von Sterblichkeit und Gesundheitszustand, ...)
- Semi-Markov-Modelle

Literatur

- Biometrical worst-case scenarios for multi-state life insurance policies.
  Insurance: Mathematics and Economics, doi:10.1016/j.insmatheco.2010.05.002, 2010.
- First-order mortality rates and safe-side actuarial calculations in life insurance.
  Erscheint in: ASTIN Bulletin (mit Michel Denuit).
- Making use of netting effects when composing life insurance contracts.
  Erscheint in: Blätter der DGVFM.
- A sensitivity analysis concept for life insurance with respect to a valuation basis of infinite dimension.
  Insurance: Mathematics and Economics, 42(2):680-690, 2008.