Paired-Comparison: Pattern Model

Eigenschaften von Finanzmodellen und deren Bedeutung für den Kunden

Martin Hölbl
Birgit Miksch
David Seres

Überblick

- Abhängigkeitsannahme
- Modell
- Umfrage
  - Ausgangslage
  - Datenstruktur
- Anwendung

Abhängigkeitsannahme

- Viele Bradley-Terry Modelle nehmen (mehr oder weniger) explizit an, dass die Entscheidungen einer Versuchsperson voneinander unabhängig sind.
- Bei der wiederholten Wahl einer Versuchsperson zwischen Objekten sind Abhängigkeiten jedoch wahrscheinlich

→ Log-linear Variante des Bradley-Terry Modells das Abhängigkeiten zwischen den Beurteilungen berücksichtigt

Ausgangsmodell

- Determining the scale values of a set of J objects on a preference continuum
- $O_1, O_2, \ldots, O_J$
- Not directly observable
- Basic BT model:

$$P\{Y_{ij} = 1 \mid \pi_i, \pi_j\} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}$$

Ausgangsmodell

- Basis: Simple log-linear model for a corresponding contingency table
- Prefering obj. i over obj. j:

$$P\{Y_{ij} = 1 \mid \pi_i, \pi_j\} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} = \frac{\sqrt{\pi_i/\pi_j}}{\sqrt{\pi_i/\pi_j} + \sqrt{\pi_j/\pi_i}}$$

- Where π_i is defined as:

$$\pi_i = \frac{\exp\{2\lambda_i\}}{\Sigma_j \exp\{2\lambda_i\}}, i = 1,2, \ldots, J$$

Das Modell

- A log-linear model for a $\left(\binom{I}{2} x\, 2\right)$ complete 2-dimensional (object pairs x response category) contingency table under product multinominal sampling

Das Modell

- Design matrix ***X***:

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{I}_{\binom{J}{2}} \otimes \mathbf{1}_2, \mathbf{B} \otimes \mathbf{h} \right)$$

- $1_2{}' = (1,1)$
- $h' = (1,-1)$
- I := identity matrix of order $\binom{J}{2}$
- B := paired comparison design matrix

Notation

- Comparison of J objects

  (1,2),(1,3),…,(1,J); (2,3),(2,4),…,(2,J); …; (J-1,J)
- Results can be represented by random var

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } O_i \text{ is prefered over } O_j \\ -1 \text{ if } O_j \text{ is prefered over } O_i \end{cases}$$

- $2^{\binom{J}{2}} = \ell$ response patterns ($\mathbf{s}_i$); a vector of $\binom{J}{2}$ elements consisting of {1,-1}
- $s = (y_{12}, y_{13}, \ldots, y_{1J}, y_{23}, y_{24}, \ldots, y_{2J}, \ldots y_{J-1.J})$

Dependent decisions

- Repeated paired comparison by the same judge → possible dependencies among the pairwise judgements
- Analysis of multiple binomial response

$$(Y_{12}, Y_{13}, \ldots, Y_{1J}, Y_{23}, Y_{24}, \ldots, Y_{2J}, \ldots Y_{J-1,J})$$

- For identical standards in the comparison of objects *i* and *j* and objects *i* and *k* the assessment of object i is likely to be similar in both comparisons

Dependent decisions

- Similarity in evaluation introduces dependencies between the observed responses
- Paired comparison with object pairs (O_i,O_j) and (O_i,O_k) → dependency is introduced by the same object Oi involved in both pairs which is characterized by a further parameter $\theta_{ij,ik} := \theta_{i,jk}$

Dependent decisions

- Special case J = 3:

$$p(y_{12}, y_{13}, y_{23}) = C^{**} \left(\frac{\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_2}}\right)^{y_{12}} \left(\frac{\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_3}}\right)^{y_{13}} \left(\frac{\sqrt{\pi_2}}{\sqrt{\pi_3}}\right)^{y_{23}} \text{x}$$

$$\exp\{\theta_{1,23} y_{12} y_{13} + \theta_{2,13} y_{12} y_{23} + \theta_{3,12} y_{13} y_{23}\}$$

Dependent decisions

- Using matrix notation:

  all response pattern = (1,X,W)β

  X =YB

  $\beta' = (\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta_{1,23}, \theta_{2,13}, \theta_{3,12})$

  W = interaction effects

  1 = $(2^{\binom{J}{2}} \times 1)$

  Y = $(2^{\binom{J}{2}} \times \binom{J}{2})$ design matrix

  B= $(\binom{J}{2} \times J)$ paired comparison design matrix.

Subject –specific covariate

- Replacing λ and θ by a linear predictor
- Linear predictor: $\lambda_j \to \lambda_j + \lambda_{j\ell}$

$$\ln m(y_{12}, y_{13}, y_{23} | \ell) = \gamma_\ell + (y_{12\ell} + y_{13\ell})(\lambda_1 + \lambda_{1\ell})$$
$$+ (y_{23\ell} - y_{12\ell})(\lambda_2 + \lambda_{2\ell}) + (-y_{13\ell} - y_{23\ell})(\lambda_3 + \lambda_{3\ell})$$
$$+ \theta_{1,23} y_{12\ell} y_{13\ell} + \theta_{2,13} y_{12\ell} y_{23\ell} + \theta_{3,12} y_{13\ell} y_{23\ell}.$$

Ausgangslage Behavioral Finance

- Anleger und Finanzdienstleister nehmen Anlageentscheidungen unterschiedlich wahr
  - ⇨ Ineffizienzen
- „homo oeconomicus“
  - Unrealistische Annahme
- ⇨ Einbezug von verhaltenswissen-schaftlichen Aspekten
  - ⇨ Situative Faktoren

Datensatz (I)

- Angaben zum Umfeld der Anlageentscheidung
  - Wirtschaftliche Entwicklung der nächsten 2 Jahre
  - Zukunftsaussichten des Kapitalmarktes
  - Anteil des Investierten Betrages am Gesamtvermögen
  - Eingeschätzte Höhe des angelegten Betrages
- Persönliche Angaben
  - Alter
  - Familienstand

Datensatz (II) - Paarvergleich

- Original Datensatz (8 Objekte)

Eigenschaften \ Ausprägungen	1	2	3
Risiko	gering	hoch	
Ertrag	gering	hoch	
Laufzeit	kurz	lang	
Anzulegender Betrag	gering	mittel	hoch

- Verwendete Daten (6 Objekte)

Eigenschaften \ Ausprägungen	1	2	3
Risiko	gering	hoch	
Anzulegender Betrag	gering	mittel	hoch

Anwendung

→ R

Datensatz (III)

- Wirtschaft
  - 0 positiv
  - 1 stabil
  - 2 negativ
- Kapitalmarkt
  - 0 positiv
  - 1 negativ
- Betrag/Vermögen
  - 0: < 10%
  - 1: 11 – 25%
  - 2: 26 – 40%
  - 3: > 40%
- Betragshöhe
  - 0: gering
  - 1: durchschnittlich
  - 2: hoch
- Alter
  - 0: < 25
  - 1: 26 - 35
  - 2: 36 - 55
  - 3: 56 - 65
  - 4: > 65
- Familienstand
  - 0: alleine
  - 1: Partnerschaft/Ehe (keine Kinder)
  - 2: Partnerschaft/Ehe (Kinder < 18)
  - 3: Partnerschaft/Ehe (Kinder > 18)