9 Kontingenztafeln

9.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten die folgende Situation: An einer Folge von Untersuchungsobjekten werden zwei qualitative Merkmale erhoben. Die beiden Merkmale haben jeweils zwei Ausprägungen $A,\ A'$ bzw. $B,\ B'$. Der Ausgangspunkt der statistischen Untersuchung ist eine Datenliste, in der zu jedem Untersuchungsobjekt ein **Datenpaar** angegeben ist.

Wir interessieren uns für die Häufigkeiten, mit denen die **Kombinationen der Ausprägungen** auftreten. Es sind folgenden Kombinationen möglich:

$$A \cap B,\ A \cap B',\ A' \cap B,\ A' \cap B'.$$

Der Übersichtlichkeit halber ordnet man die Häufigkeiten in einer **Kontingenztafel** an.

Kontingenztafel (Vierfeldertafel):

	B	B'	
A	$h(A \cap B)$	$h(A \cap B')$	$h(A)$
A'	$h(A' \cap B)$	$h(A' \cap B')$	$h(A')$
	$h(B)$	$h(B')$	

Die Kontingenztafel enthält als Zeilensummen und als Spaltensummen die Häufigkeitsverteilungen der einzelnen Merkmale. Man nennt sie in diesem Zusammenhang die **Randverteilungen**. Es gibt mehrere verschiedene Möglichkeiten, relative Häufigkeiten zu bilden.

Gewöhnliche relative Häufigkeiten: Diese relativen Häufigkeiten werden auf den Umfang des gesamten Datensatzes bezogen: $f(A \cap B) = \dfrac{h(A \cap B)}{n}$.

Bedingte relative Häufigkeiten: $f(A|B) = \dfrac{h(A \cap B)}{h(B)} = \dfrac{f(A \cap B)}{f(B)}$ Man nennt diese Größe die **bedingte relative Häufigkeit von A unter der Bedingung B.** Sie gibt Antwort auf die Frage, wie oft zusätzlich A beobachtet wurde unter all jenen Fällen, in denen B beobachtet wurde.

(9.1) AUFGABE

Von 1000 Verkehrsunfällen waren 280 mit tödlichem Ausgang. Davon ereigneten sich 80 bei einer Geschwindigkeit von mehr als $150\ km/h$. Insgesamt ereigneten sich 900 Verkehrsunfälle bei einer niedrigeren Geschwindigkeit. Stellen Sie die Kontingenztafel auf und untersuchen Sie die Rolle der Geschwindigkeit in bezug auf die Letalität des Unfalles.

Lösung: Es sei A =„Unfall endet tödlich" und B =„Unfall ereignet sich bei mehr als $150\ km/h$". Die Kontingenztafel lautet

	B	B'	
A	80	200	280
A'	20	700	720
	100	900	1000

Um die Rolle der Geschwindigkeit zu untersuchen, muß man die Häufigkeit von A für die Unfälle unter B und unter B' getrennt untersuchen:

$$f(A|B) := \frac{h(A\cap B)}{h(B)} = 0,8 \text{ und } f(A|B') := \frac{h(A\cap B')}{h(B')} = 0,22.$$

Wir sehen daraus: Obwohl die unter den tödlichen Unfällen die Hochgeschwindigkeitsunfälle seltener sind, sind unter den Hochgeschwindigkeitsunfällen die tödlichen Unfälle häufiger.

(9.2) AUFGABE

Bestimmen Sie aus den DEMO–Daten die Kontingenztafel der Merkmale Schulbildung und Flugangst. Wie groß sind die bedingten relativen Häufigkeiten für Flugangst unter den Bewerbern unterschiedlicher Schulbildung?

Lösung: Die Kontingenztafel lautet

	$FA=0$	$FA=1$	
$ED=0$	55	10	65
$ED=1$	14	21	35
	69	31	100

Die bedingten relativen Häufigkeiten lauten

$$f(FA=1|ED=0) = \frac{10}{65} = 0,154,$$

$$f(FA=1|ED=1) = \frac{21}{35} = 0,6.$$

Stammen die Daten aus einem Zufallsexperiment, dann besitzen die Ereigniskombinationen auch Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeitstabelle gibt man als Vierfeldertafel an:

	B	B'	
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B')$	$P(A)$
A'	$P(A'\cap B)$	$P(A'\cap B')$	$P(A')$
	$P(B)$	$P(B')$	1

Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahl sind diese Wahrscheinlichkeiten die Grenzwerte der entsprechenden relativen Häufigkeiten. Aber auch die bedingten relativen Häufigkeiten konvergieren für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert:

$$f_n(A|B) = \frac{f_n(A\cap B)}{f_n(B)} \to \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Dieser Grenzwert ist gleichsam ein idealisierter Wert der bedingten relativen Häufigkeiten.

(9.3) DEFINITION: *Die* **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(A|B)$ **von** A **unter** B *ist die Wahrscheinlichkeit von* A*, gemessen an Versuchen, bei denen* B *eintritt:*

$$\boxed{P(A|B) := \tfrac{P(A\cap B)}{P(B)}.}$$

Eine bedingte Wahrscheinlichkeit ist natürlich nur dort sinnvoll, wo $P(B) \neq 0$.

In manchen Anwendungen ist $P(B)$ und $P(A|B)$ gegeben und man ist an der Berechnung von $P(A\cap B)$ interessiert. Die Formel der Wahl ist dann die

$$\boxed{\textbf{Produktformel}\text{: } P(A\cap B) = P(A|B)P(B).}$$

(9.4) AUFGABE

Ein Wurf mit zwei Würfeln ergibt eine Augensumme ≥ 10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dabei mindestens eine 6 auftritt?

Lösung: Es bezeichne S die Augensumme und A das Ereignis „mindestens eine Sechs". Es geht um die Berechnung von

$$P(A|S\geq 10) = \frac{P(A\cap(S\geq 10))}{P(S\geq 10)}.$$

Bei Wurf mit zwei Würfeln gibt es 36 gleichwahrscheinliche Ergebnisse. Davon entfallen 5 auf das Ereignis $A\cap(S\geq 10)$ und 6 auf das Ereignis $(S\geq 10)$. Daraus folgt

$$P(A\cap(S\geq 10)) = \frac{5}{36} \;\text{ und }\; P(S\geq 10) = \frac{6}{36},$$

und daher gilt

$$P(A|S\geq 10) = \frac{5}{6}.$$

(9.5) AUFGABE

Ein Unternehmen produziert zwei Sorten von Produkten. Vier Prozent aller Produkte sind Ausschuß. Von den einwandfreien Produkten gehören 75 % zur Sorte 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewähltes Produkt zur Sorte 1 gehört und einwandfrei ist?

Lösung: Es sei A das Ereignis „Produkt gehört zur Sorte 1" und B das Ereignis „Produkt ist einwandfrei". Aus der Angabe entnehmen wir $P(B') = 0,04$ und $P(A|B) = 0,75$. Daraus folgt

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,75 \cdot 0,96 = 0,72.$$

Das folgende Beispiel ist typisch für die Anwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten.

(9.6) BEISPIEL: **Qualitätskontrolle**

Ein Konsument bezieht Glühbirnen von drei Herstellern A, B und C. Je 25 % der Glühbirnen stammen von den Herstellern A und B, der Rest stammt vom Hersteller C. Die vom Konsumenten verlangte Mindestqualität einer Glühbirne bestehe darin, daß sie eine Lebensdauer von 300 Stunden besitzt. Der Glühbirnen des Herstellers A erfüllen diese Anforderung zu 90 %, die des Herstellers B zu 70 % und die des Herstellers C zu 50 %.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig ausgewählte Glühbirne, die den Anforderungen nicht entspricht, vom Hersteller A (bzw. B, C) stammt?

Wir bezeichnen mit $A,\ B$ und C die Ereignisse, die darin bestehen, daß die Glühbirne vom Hersteller A, B bzw. C stammt. Nach Voraussetzung ist $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.25$ und $P(C) = 0.50$. Es bezeichne L das Ereignis, daß die Glühbirne die erforderliche Lebensdauer besitzt. Die Voraussetzungen besagen, daß $P(L|A) = 0.9$, $P(L|B) = 0.7$ und $P(L|C) = 0.5$.

Die Problemstellung besteht darin, die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|L')$, $P(B|L')$ und $P(C|L')$ zu berechnen.

Die Lösung der Aufgabe erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst berechnet man mit Hilfe der Produktformel die Wahrscheinlichkeiten aller Ereigniskombinationen. Trägt man diese Wahrscheinlichkeiten in eine Tabelle ein, so können an den Rändern die Wahrscheinlichkeiten aller Einzelereignisse abgelesen werden:

	A	B	C	
L	0.225	0.175	0.25	0.65
L'	0.025	0.075	0.25	0.35
	0.25	0.25	0.25	1

Aus dieser Tabelle lassen sich die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten leicht berechnen: $P(A|L') = 0.0714$, $P(B|L') = 0.214$, $P(C|L') = 0.714$.

Einige Rechenschritte des eben beschriebenen Beispiels lassen sich als Formeln oder „Lehrsätze” isolieren.

(9.7) SATZ: **Formel für die „inverse” Wahrscheinlichkeit:**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

BEGRÜNDUNG:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

□

Die folgenden beiden Aussagen gelten unter der Voraussetzung:

Es sei $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ eine Zerlegung, dh. ein vollständiges System unvereinbarer Ereignisse.

(9.8) SATZ: **Formel für die „totale” Wahrscheinlichkeit:**
Es sei $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ eine Zerlegung. Dann gilt:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_m)P(B_m).$$

BEGRÜNDUNG: Da $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ eine Zerlegung bildet, ist

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_m)$$

und daher

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_m) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_m)P(B_m). \end{aligned}$$

□

(9.9) SATZ: **Formel von BAYES:**
Es sei $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ eine Zerlegung.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_m)P(B_m)}$$

für $i = 1, 2, \ldots, m$.

BEGRÜNDUNG: Man setzt die Formel für die „totale” Wahrscheinlichkeit in die Formel für die „inversen” Wahrscheinlichkeit ein. □

Entscheidungsprobleme

Eine sehr wichtige Anwendung finden bedingte Wahrscheinlichkeiten bei der Analyse von Entscheidungsproblemen.

(9.10) BEISPIEL: **Labormedizin**

Ein medizinischer Labortest werde eingesetzt, um zu entscheiden, ob eine Untersuchungsperson an einer bestimmten Krankheit leidet (K_+) oder nicht (K_-). Der Labortest führt zu den Entscheidungen E_+:„Der Patient leidet an der Krankheit", und E_-:„Der Patient leidet nicht an der Krankheit". Labortests sind fehleranfällig und führen daher nicht immer zu richtigen Entscheidungen: Es gelte

$P(E_+|K_+) = 0,95$**:** 95 % der tatsächlich Erkrankten werden als solche erkannt.

$P(E_-|K_-) = 0,80$**:** 80 % der nicht Erkrankten werden als solche erkannt.

Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten beschreiben die **Verläßlichkeit** des Labortests. Ihnen entsprechen die **Fehlerwahrscheinlichkeiten**

$$\begin{aligned} P(E_-|K_+) &= 1 - P(E_+|K_+) = 0,05 \\ P(E_+|K_-) &= 1 - P(E_-|K_-) = 0,2. \end{aligned}$$

Aus der Sicht eines Patienten ist es nicht so sehr interessant, wie viele Kranke oder Gesunde der Labortest als solche erkennt; es geht ihm vielmehr darum, was aus einer einmal getroffenen Entscheidung geschlossen werden kann. Es geht also um die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten, die man auch **a posteriori Wahrscheinlichkeiten** nennt:

$P(K_+|E_+) = ?$ Wieviele der als krank eingestuften Untersuchungspersonen sind tatsächlich krank?

$P(K_-|E_-) = ?$ Wieviele der als gesund eingestuften Untersuchungspersonen sind tatsächlich gesund?

Wir wissen, wie diese inversen bedingten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen sind:

$$P(K_+|E_+) = \frac{P(E_+|K_+)P(K_+)}{P(E_+|K_+)P(K_+) + P(E_+|K_-)P(K_-)},$$

$$P(K_-|E_-) = \frac{P(E_-|K_-)P(K_-)}{P(E_-|K_+)P(K_+) + P(E_-|K_-)P(K_-)}.$$

Offenbar genügt es nicht, die Verläßlichkeit bzw. die Fehlerwahrscheinlichkeiten des Labortests zu kennen. Es müssen darüber hinaus die **a priori Wahrscheinlichkeiten** $P(K_+)$ und $P(K_-)$ der mögliche Zustände des Patienten bekannt sein.

Wir betrachten zwei konkrete Beispiele.

Die Krankheit sei relativ häufig, z.B. $P(K_+) = 0,7$. Dann folgt für die a posteriori Wahrscheinlichkeiten

$$P(K_+|E_+) = \frac{0,95 \cdot 0,7}{0,95 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3} = 0,91$$

$$P(K_-|E_-) = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3} = 0,87.$$

Es sind also beide Entscheidungen als einigermaßen verläßlich anzusehen.

Die Krankheit sei eher selten, z.B. $P(K_+) = 0,05$. Dann folgt für die a posteriori Wahrscheinlichkeiten

$$P(K_+|E_+) = \frac{0,95 \cdot 0,05}{0,95 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,95} = 0,2$$

$$P(K_-|E_-) = \frac{0,8 \cdot 0,95}{0,05 \cdot 0,05 + 0,8 \cdot 0,95} = 0,997.$$

Ein pathologisches Testergebnis ist unter diesen Umständen sehr kritisch zu bewerten.

Wie soll man aber eine Einzelentscheiden interpretieren, wenn die a priori Wahrscheinlichkeiten nicht bekannt sind? Ein für die praktische Anwendung brauchbarer Gesichtspunkt besteht darin, die a posteriori Wahrscheinlichkeiten unter der Annahme zu berechnen, daß die a priori Wahrscheinlichkeiten der beiden Zustände gleich groß, also gleich 0,5 sind (Indifferenzannahme). In unserem Fall gilt dann

$$P(K_+|E_+) = \frac{0,95 \cdot 0,5}{0,95 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,5} = \frac{1}{1 + \frac{0,2}{0,95}} = 0,83$$

Die Verläßlichkeit der Entscheidung K_+ wird also vom Quotienten

$$\frac{0,2}{0,95} = \frac{P(E_+|K_-)}{P(E_+|K_+)}$$

bestimmt. Ähnlich wird die Verläßlichkeit der Entscheidung E_-

$$P(K_-|E_-) = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,05 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,5} = \frac{1}{1 + \frac{0,05}{0,8}} = 0,94$$

durch den Quotienten

$$\frac{0,05}{0,8} = \frac{P(E_-|K_+)}{P(E_-|K_-)}$$

bestimmt. **Die Fehlerwahrscheinlichkeiten bestimmen die Verläßlichkeit der Einzelentscheidungen bei Indifferenz zwischen den möglichen Zuständen**.

Ein Entscheidungsproblem liegt dann vor, wenn ein Untersuchungsgegenstand endlich viele verschiedene Zustände $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ besitzen kann, die nicht direkt beobachtbar sind. Mit Hilfe eines Entscheidungsmechanismus muß eine Entscheidung über den wahren Zustand getroffen werden. Typische Beispiele solcher Entscheidungsprobleme sind alle Arten von Eignungstests, medizinische Labortests, Tests der industriellen Qualitätskontrolle und schließlich auch alle statistischen Tests von Hypothesen.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf binäre Entscheidungsprobleme, das sind Probleme, bei denen nur zwischen zwei alternativen Zuständen entschieden werden muß. Es seien Z_1 und Z_2 die beiden möglichen Zustände des Untersuchungsobjekts. Mit E_1 bezeichnen wir die Entscheidung zugunsten von Z_1, mit E_2 die Entscheidung zugunsten von Z_2.

	E_1	E_2
Z_1	richtig	falsch
Z_2	falsch	richtig

	E_1	E_2
Z_1	$Z_1 \cap E_1$	$Z_1 \cap E_2$
Z_2	$Z_2 \cap E_1$	$Z_2 \cap E_2$

Das Ereignis $Z_1 \cap E_2$ heißt **Fehler 1.Art** und das Ereignis $Z_2 \cap E_1$ heißt **Fehler 2.Art**.

(9.11) DEFINITION: *Unter den* **Fehlerwahrscheinlichkeiten** *eines binären Entscheidungsproblems versteht man die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(E_2|Z_1)$ und $P(E_1|Z_2)$.*

Wenn keine weiteren Informationen zur Verfügung stehen, dienen die Fehlerwahrscheinlichkeiten als Grundlage für die Bewertung der Verläßlichkeit von Einzelentscheidungen:

Faustregel:

- Die Entscheidung E_1 gilt als verläßlich wenn $P(E_1|Z_2)$ wesentlich kleiner ist als $P(E_1|Z_1)$: Die Entscheidung E_1 wird unter Z_2 wesentlich seltener getroffen als unter Z_1.
- Die Entscheidung E_2 gilt als verläßlich wenn $P(E_2|Z_1)$ wesentlich kleiner ist als $P(E_2|Z_2)$: Die Entscheidung E_2 wird unter Z_1 wesentlich seltener getroffen als unter Z_2.

(9.12) BEISPIEL: **Qualitätskontrolle**

Ein Produkt besitze die Zustände Z_1=„tauglich” und Z_2=„mangelhaft”. Die Fehlerwahrscheinlichkeit $P(E_2|Z_1)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, ein taugliches Produkt zurückzuweisen, heißt **Produzentenrisiko**. Die Fehlerwahrscheinlichkeit $P(E_1|Z_2)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, ein mangelhaftes Produkt zu akzeptieren, heißt **Konsumentenrisiko**.

(9.13) BEISPIEL: **Test einer Hypothese**

Eine Hypothese hat die beiden Zustände Z_1=„richtig” und Z_2=„falsch”. Die beim Testen von Hypothesen üblichen Sprechweisen sind:

Signifikanzniveau:	$1 - P(E_2 \vert Z_1)$
Trennschärfe:	$1 - P(E_1 \vert Z_2)$

Beim Testen von Hypothesen wird die Fehlerwahrscheinlichkeit $P(E_2|Z_1)$ durch die Wahl des kritischen Wertes klein gehalten. Daher besitzt E_2 eine kleine Fehlerwahrscheinlichkeit und kann als Bestätigung des Zustandes Z_2=„Hypothese ist falsch” interpretiert werden. Dagegen gibt es in der Regel keine Information über die Fehlerwahrscheinlichkeit $P(E_1|Z_2)$ von E_1. Eine Entscheidung E_1 kann daher nicht als Bestätigung des Zustandes Z_1=„Hypothese ist richtig” aufgefaßt werden.

Die Interpretation von Entscheidungen ausschließlich auf Grund von Fehlerwahrscheinlichkeiten ist eine Notlösung, die in Ermangelung zusätzlicher Information unvermeidlich ist. Eine fundierte Beurteilung einer Einzelentscheidung ist nur auf Grund der „inversen” bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Z_1|E_1)$ und $P(Z_2|E_2)$ möglich.

(9.14) DEFINITION: *Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Z_1|E_1)$ und $P(Z_2|E_2)$ heißen* **a posteriori Wahrscheinlichkeiten**, *weil durch sie die Beurteilung von Einzelentscheidungen im nachhinein (a posteriori) möglich ist.*

Die Berechnung der a posteriori Wahrscheinlichkeiten ist aber nur mit der Formel für die inverse Wahrscheinlichkeit

$$P(Z_1|E_1) = \frac{P(E_1|Z_1)P(Z_1)}{P(E_1)} \qquad P(Z_2|E_2) = \frac{P(E_2|Z_2)P(Z_2)}{P(E_2)},$$

wobei der Nenner mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit berechnet werden muß. Für beides benötigt man die Größen $P(Z_1)$und $P(Z_2)$. Man muß also wissen, wie oft im langfristigen Durchschnitt die Zustände Z_1 und Z_2 auftreten.

(9.15) DEFINITION: *Die Wahrscheinlichkeiten $P(Z_1)$ und $P(Z_2)$ der einzelnen Zustände heißen* **a priori Wahrscheinlichkeiten**, *denn sie geben an, mit welchen Häufigkeiten der Zustände Z_1 und Z_2 man von vornherein (a priori) rechnen muß.*

(9.16) AUFGABE

Es liege ein Entscheidungsproblem mit den zwei Zuständen $Z_1,\ Z_2$ und zwei Entscheidungen $E_1,\ E_2$ vor. Die Fehlerwahrscheinlichkeiten betragen $P(E_1|Z_2) = 0.4$ und $P(E_2|Z_1) = 0.01$. Wir nehmen an, daß wir eine Folge von Entscheidungen zu treffen haben, bei denen die Zustände verschieden sein können. Die einzelnen Zustände haben a priori Wahrscheinlichkeiten $P(Z_1)$ und $P(Z_2)$. Berechnen Sie die a posteriori Wahrscheinlichkeiten unter den folgenden Annahmen:

(a) Die beiden Zustände Z_1 und Z_2 seien gleichwahrscheinlich, dh. $P(Z_1) = P(Z_2) = 0.5$.

(b) Es sei $P(Z_1) = 0.1$ und $P(Z_2) = 0.9$.

(c) Es sei $P(Z_1) = 0.9$ und $P(Z_2) = 0.1$.

Lösung: (a) Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeiten der Vierfeldertafel:

	E_1	E_2	
Z_1	$0,495$	$0,005$	$0,5$
Z_2	$0,2$	$0,3$	$0,5$
	$0,695$	$0,305$	

Daraus ergeben sich als a posteriori Wahrscheinlichkeiten

$$P(Z_1|E_1) = \frac{0,495}{0,695} = 0,71 \ \text{ und } P(Z_2|E_2) = \frac{0,3}{0,305} = 0,98.$$

(b)Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeiten der Vierfeldertafel:

	E_1	E_2	
Z_1	$0,099$	$0,001$	$0,1$
Z_2	$0,36$	$0,54$	$0,9$
	$0,459$	$0,541$	

Daraus ergeben sich als a posteriori Wahrscheinlichkeiten

$$P(Z_1|E_1) = \frac{0,099}{0,459} = 0,216 \ \text{ und } P(Z_2|E_2) = \frac{0,54}{0,541} = 0,998.$$

(c) Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeiten der Vierfeldertafel:

	E_1	E_2	
Z_1	$0,891$	$0,009$	$0,9$
Z_2	$0,04$	$0,06$	$0,1$
	$0,931$	$0,069$	

Daraus ergeben sich als a posteriori Wahrscheinlichkeiten

$$P(Z_1|E_1) = \frac{0,891}{0,931} = 0,957 \ \text{ und } P(Z_2|E_2) = \frac{0,06}{0,069} = 0,87.$$

Abschließend betrachten wir ein Beispiel für die Konstruktion einer Entscheidungsregel.

(9.17) BEISPIEL: **Kreditwürdigkeit**

Eine Bank möchte Kriterien entwickeln, mit denen es möglich ist, die Kreditwürdigkeit von Kunden zu beurteilen. Zu diesem Zweck werden 6 Kategorien von Kreditanträgen unterschieden:

	Kredithöhe (Vielfache des Monatseinkommens)		
Wohnsitz	< 2	2–5	> 5
ansässig	A_1	A_3	A_5
fremd	A_2	A_4	A_6

Aus Erfahrungen der Vergangenheit weiß, man wie häufig diese Kategorien unter kreditwürdigen (K_+) bzw. kreditunwürdigen (K_-) Anträgen zutreffen:

$h(A_i|K_+)$

200	500	50
50	150	50

$h(A_i|K_-)$

50	120	20
50	80	180

Es ist ein Entscheidungsverfahren zu entwickeln, bei dem auf Grund der Kategorie A_i über die Kreditwürdigkeit zu entscheiden ist.

Der erste Schritt besteht darin, aus den empirischen Daten die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i|K_+)$ und $P(A_i|K_-)$ zu schätzen:

$P(A_i|K_+)$

$0,2$	$0,5$	$0,05$
$0,05$	$0,15$	$0,05$

$P(A_i|K_-)$

$0,1$	$0,24$	$0,04$
$0,1$	$0,16$	$0,36$

Es gibt nun sehr viele mögliche Entscheidungsregeln. Jede einzelne Entscheidungsregel besteht in einer Auswahl von irgendwelchen der Kategorien $A_1, A_2, \ldots, A_6$, die dazu bestimmt werden, die Entscheidung der Kreditwürdigkeit (E_+) zu veranlassen, während die übrigen Kategorien Kreditunwürdigkeit (K_-) nach sich ziehen. Es gibt insgesamt $2^6 = 64$ verschiedene Entscheidungsregeln. Die Qualität einer einzelnen Entscheidungsregel hängt von ihren Fehlerwahrscheinlichkeiten $P(E_+|K_-)$ und $P(E_-|K_+)$ ab. Wenn man die Fehlerwahrscheinlichkeiten aller Entscheidungsregeln als Punktediagramm (**Risikomenge**) darstellt, so erkennt man die sehr unterschiedliche Qualität der Entscheidungsregeln. Das Problem besteht darin, eine Entscheidungsregel zu finden, deren Fehlerwahrscheinlichkeiten möglichst klein sind.

Auf Grund der graphischen Darstellung sind die Entscheidungsregeln am linken unteren Rand der Risikomenge von besonderem Interesse für uns. Jede dieser Entscheidungsregeln ist insofern unübertrefflich, als es keine Entscheidungsregel gibt, bei der beide Fehlerwahrscheinlichkeiten kleiner sind. Wir führen nun eine Methode mit der es möglich ist, diese Entscheidungsregeln rechnerisch zu ermitteln. Es ist die Methode von **NEYMAN–PEARSON**.

Der Grundgedanke besteht darin, die einzelnen Kategorien nach der Größe des Quotienten

$$\frac{P(A_i|K_+)}{P(A_i|K_-)}$$

zu ordnen:

	$P(A_i\|K_+)$	$P(A_i\|K_-)$	Quotient
A_1	$0,2$	$0,1$	2
A_2	$0,05$	$0,1$	$0,5$
A_3	$0,5$	$0,24$	$2,08$
A_4	$0,15$	$0,16$	$0,937$
A_5	$0,05$	$0,04$	$1,25$
A_6	$0,05$	$0,36$	$0,139$

	$P(A_i\|K_+)$	$P(A_i\|K_-)$	Quotient
A_3	$0,5$	$0,24$	$2,08$
A_1	$0,2$	$0,1$	2
A_5	$0,05$	$0,04$	$1,25$
A_4	$0,15$	$0,16$	$0,937$
A_2	$0,05$	$0,1$	$0,5$
A_6	$0,05$	$0,36$	$0,139$

Indem wir nun die Kategorien in der neuen Reihenfolge vereinigen, erhalten wir sieben Entscheidungsregeln:

	E_+	E_-	$P(E_+\|K_-)$	$P(E_-\|K_+)$
1	$\emptyset$	$A_3 \cup A_1 \cup A_5 \cup A_4 \cup A_2 \cup A_6$	0	1
2	A_3	$A_1 \cup A_5 \cup A_4 \cup A_2 \cup A_6$	$0,24$	$0,5$
3	$A_3 \cup A_1$	$A_5 \cup A_4 \cup A_2 \cup A_6$	$0,34$	$0,3$
4	$A_3 \cup A_1 \cup A_5$	$A_4 \cup A_2 \cup A_6$	$0,38$	$0,25$
5	$A_3 \cup A_1 \cup A_5 \cup A_4$	$A_2 \cup A_6$	$0,54$	$0,1$
6	$A_3 \cup A_1 \cup A_5 \cup A_4 \cup A_2$	A_6	$0,64$	$0,05$
7	$A_3 \cup A_1 \cup A_5 \cup A_4 \cup A_2 \cup A_6$	$\emptyset$	1	0

Um einen Gesichtspunkt für die Auswahl einer bestimmten Regel aus der Menge der konstruierten sieben Regeln zu erhalten, sind mehrere Möglichkeiten denkbar:

1. Es wird verlangt, daß höchstens jeder fünfte kreditwürdige Antrag abgelehnt wird. Das heißt: $P(E_-|K_+) \leq 0,2$.

   Diese Forderung erfüllen die Regeln 5, 6 und 7. Von diesen hat die Regel 5 die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit $P(E_+|K_-)$. Also ist die Regel 5 zu verwenden.

2. Es wird verlangt, daß höchstens 30 % der kreditunwürdigen Anträgen bewilligt werden. Das heißt: $P(E_+|K_-) \leq 0,3$.

   Diese Forderung erfüllen die Regeln 1 und 2. Es ist die Regel 2 zu verwenden.

3. Es soll diejenige Regel verwendet werden, deren maximale Fehlerwahrscheinlichkeit unter allen Regeln am kleinsten ist. (**Minimax–Regel**)

   In diesem Fall ist die Regel 3 zu verwenden.

4. Es soll die Regel verwendet werden, für die die Summe der Fehlerwahrscheinlichkeiten unter allen Regeln am kleinsten ist.

   In diesem Fall ist die Regel 4 zu verwenden.

   Die Regel hat eine interessante Eigenschaft: Sie trifft für jede Kategorie A_i gerade jene Entscheidung, für welche die entsprechende der Wahrscheinlichkeiten $P(A_i|K_+)$ und $P(A_i|K_-)$ größer ist. Deshalb nennt man diese Regel auch **Maximum–Likelihood Regel**.

5. Es sei bekannt, daß 80 % der Kreditanträge kreditwürdig sind. Die Entscheidungsregel soll die Wahrscheinlichkeit der Fehlentscheidungen minimieren. Das heißt, es soll

   $$\begin{aligned} &P\Big((E_- \cap K_+) \cup (E_+ \cap K_-)\Big) \\ &= P(E_-|K_+) \cdot 0,8 + P(E_+|K_-) \cdot 0,2 \end{aligned}$$

   möglichst klein sein. (**BAYES Regel**).

   Es ist die Regel 5 zu verwenden.

(9.18) TESTFRAGEN

1. Was sind bedingte Wahrscheinlichkeiten? Wie lautet die formale Definition und was sind die praktischen Interpretationen?
2. Begründen Sie die Definitionsformel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.
3. Formulieren Sie den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit. Geben Sie ein typisches Anwendungsbeispiel.
4. Was besagt der Satz von der inversen Wahrscheinlichkeit? Geben Sie ein typisches Anwendungsbeispiel.
5. Welche Fehlermöglichkeiten gibt es bei Entscheidungsproblemen mit zwei Alternativen? Inwiefern hängt die Interpretation der Entscheidungen von den Fehlerwahrscheinlichkeiten ab?
6. Erklären Sie die Begriffe a priori Wahrscheinlichkeiten und a posteriori Wahrscheinlichkeiten in Zusammenhang mit Entscheidungsproblemen.
7. Erklären Sie die Begriffe Produzentenrisiko und Konsumentenrisiko.

9.2 Gekoppelte Ereignisse

Im Rahmen eines Zufallsexperiments untersuchen wir die Ereignisse A und B. Wir interessieren uns für die Frage, ob die Ereignisse einander behindern oder begünstigen. Wir sagen „B begünstigt A", wenn $P(A|B) > P(A)$. Entsprechend sagen wir „A begünstigt B", wenn $P(B|A) > P(B)$. Es ist leicht nachzurechnen, daß die beiden Aussagen zur Ungleichung $P(A \cap B) > P(A)P(B)$ äquivalent sind. Dies gibt Anlaß zur

(9.19) DEFINITION: *Zwei Ereignisse A und B* **begünstigen einander** *oder sind* **positiv gekoppelt**, *wenn $P(A \cap B) > P(A)P(B)$.*

Ähnlich sagt man, daß das Ereignis B das Ereignis A behindert, wenn $P(A|B) < P(A)$. Dies ist wieder äquivalent zur Aussage „A behindert B" und zur Ungleichung $P(A \cap B) < P(A)P(B)$.

(9.20) DEFINITION: *Zwei Ereignisse A und B* **behindern einander** *oder sind* **negativ gekoppelt**, *wenn $P(A \cap B) < P(A)P(B)$.*

Das Gegenteil von Koppelung heißt Unabhängigkeit.

(9.21) DEFINITION: *Zwei Ereignisse A und B heißen* **gekoppelt** *oder* **stochastisch abhängig**, *wenn $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$. Sie heißen* **stochastisch unabhängig**, *wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

(9.22) Aufgabe

In einer technischen Untersuchung werden an PKWs folgende Merkmale erhoben:

R: Der PKW weist Rostschäden auf.
S: Der PKW besitzt eine Hohlraumversiegelung.

Es stellt sich heraus, daß $P(R) = 0,37$ und $P(S) = 0,71$. Außerdem ist $P(R \cap S) = 0,11$. Untersuchen Sie die Koppelung der Merkmale.

Lösung: Da $P(R \cap S) = 0,11 < P(R)P(S) = 0,2626$, sind die beiden Ereignisse R und S negativ gekoppelt, dh. sie behindern einander.

(9.23) Aufgabe

Zeigen Sie, daß zwei Ereignisse A und B genau dann unabhängig sind, wenn A und B' unabhängig sind.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, daß nach dem Additionstheorem

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Daraus folgt

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

Setzt man nun voraus, daß A und B stochastisch unabhängig sind, dann folgt

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B').$$

Also sind A und B' stochastisch unabhängig.

Ganz analog zeigt man, daß aus der Unabhängigkeit von A und B' die Unabhängigkeit von A und B folgt.

Eine Koppelung zwischen zwei Ereignissen A und B führt auch zu einer Koppelung von A und B', usw. Wenn A und B einander behindern, dann müssen sich A und B' offensichtlich begünstigen, usw. Um alle diese miteinander zusammenhängenden Koppelungen zu erfassen, vergleichen wir die Wahrscheinlichkeitstabelle mit jener Wahrscheinlichkeitstabelle, die bei Unabhängigkeit vorliegen müßte:

tatsächlich

	B	B'	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B')$	$P(A)$
A'	$P(A' \cap B)$	$P(A' \cap B)$	$P(A')$
	$P(B)$	$P(B')$	

bei Unabhängigkeit

	B	B'	
A	$P(A)P(B)$	$P(A)P(B')$	$P(A)$
A'	$P(A')P(B)$	$P(A')P(B)$	$P(A')$
	$P(B)$	$P(B')$	

Wenn wir die Differenzen der Tabelleneinträge bilden, erhalten wir bei positiver und bei negativer Koppelung unterschiedliche Vorzeichenmuster.

Positive Koppelung

	B	B'	
A	$+$	$-$	
A'	$-$	$+$	

Negative Koppelung

	B	B'	
A	$-$	$+$	
A'	$+$	$-$	

(9.24) AUFGABE

Stellen Sie für das Beispiel (9.22) die Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten auf und vergleichen Sie sie mit der bei Unabhängigkeit erwarteten Vielfeldertafel.

Lösung:

Wahrscheinlichkeiten

tatsächlich

	S	S'	
R	$0,11$	$0,26$	$0,37$
R'	$0,60$	$0,03$	$0,63$
	$0,71$	$0,29$	

bei Unabhängigkeit

	S	S'	
R	$0,2627$	$0,1073$	$0,37$
R'	$0,4473$	$0,1827$	$0,63$
	$0,71$	$0,29$	

Die Tafel der Differenzen lautet daher

Differenzen

	S	S'	
R	$-0,1527$	$0,1527$	0
R'	$0,1527$	$-0,1527$	0
	0	0	

Um die Stärke einer Koppelung zu beurteilen bilden wir die

Vierfelderkorrelation:

$$\boxed{\rho(A,B) = \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(A')P(B)P(B')}}.}$$

(9.25) SATZ: *Die Vierfelderkorrelation hat folgende Eigenschaften:*

- *Die Werte der Vierfelderkorrelation liegen immer zwischen -1 und +1:* $-1 \leq \rho(A,B) \leq 1$.
- *Zwei Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $\rho(A,B) = 0$ ist.*
- *Zwei Ereignisse A und B sind genau dann positiv gekoppelt, wenn $\rho(A,B) > 0$ ist.*
- *Zwei Ereignisse A und B sind genau dann negativ gekoppelt, wenn $\rho(A,B) < 0$ ist.*
- *Der Extremfall positiver Koppelung $\rho(A,B) = 1$ liegt dann vor, wenn $A = B$.*
- *Der Extremfall negativer Koppelung $\rho(A,B) = -1$ liegt dann vor, wenn $A = B'$.*

Das Vorzeichen sgnρ gibt also die **Richtung der Koppelung** an und der Betrag $|\rho|$ gibt die **Stärke der Koppelung** an.

(9.26) AUFGABE

Berechnen Sie für das Beispiel (9.22) die Vierfelderkorrelation.

Lösung: $\rho(R,S) = -0,697$.

Interpretation von Koppelungen

Wie kann eine Koppelung zustande kommen? Es gibt mehrere Möglichkeiten, die bei der Interpretation von Koppelungen in betracht gezogen werden müssen.

Eine Möglichkeit ist, daß zwischen den Ereignissen A und B eine **kausale Beziehung** besteht. Unter einer kausalen Beziehung versteht man eine Beziehung, bei der ein Ereignis die Rolle der **Ursache** und das andere Ereignis die der **Wirkung** spielt.

(9.27) BEISPIEL:

Im Beispiel (9.22) könnte man die negative Koppelung kausal erklären, indem man annimmt, daß die Hohlraumversiegelung eines Autos vor Rost schützt und daher als Ursache für geringe Rostschäden anzusehen ist. Dagegen wäre es nicht plausibel, geringe Rostschäden als Ursache für Hohlraumversiegelungen anzusehen. Aus dem Bestehen der negativen Koppelung allein ist nicht ersichtlich, ob und in welchem Sinn eine kausale Beziehung zwischen den Ereignissen besteht.

Im folgenden Beispiel führen wir vor, daß stochastische Koppelung auch anders als durch eine kausale Beziehung zustandekommen kann.

(9.28) BEISPIEL: **Haushaltsarbeit und Haarausfall**

In einer soziologischen Studie werden die folgenden Aussagen über Personen untersucht:

H: „Die Person arbeitet in ihrem Privathaushalt aktiv mit."
F: „Die Person hat Haarausfall."

Eine groß angelegte empirische Untersuchung ergibt folgende Häufigkeitstabelle:

	F	F'	
H	$0,115$	$0,385$	$0,5$
H'	$0,385$	$0,115$	$0,5$
	$0,500$	$0,500$	

Eine erste Analyse ergibt eine starke negative Koppelung, die Vierfelderkorrelation beträgt $\rho = -0.54$. Versucht man eine kausale Interpretation dieser Koppelung vorzunehmen, dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Haushaltsarbeit schützt vor Haarausfall.
2. Haarausfall ist bei Haushaltsarbeit hinderlich.

Natürlich sind beide Interpretationen Unsinn. Vielmehr kommt in diesem Beispiel die Koppelung völlig anders zustande.

Es gibt einen **versteckten Faktor**, der innerhalb der untersuchten Personengruppe variiert, und der sich auf Haarausfall und Haushaltsarbeit unterschiedlich auswirkt. Es ist der Faktor „Geschlecht". Männliche Personen neigen nämlich in höherem Ausmaß zu Haarausfall als weibliche Personen, dagegen in geringerem Ausmaß zu Haushaltsarbeit. Der Faktor „Geschlecht" wirkt sich kausal auf die Merkmale Haarausfall und Geschlecht aus, und bewirkt so eine Koppelung der Merkmale in den Daten, obwohl zwischen den Merkmalen selbst keine Ursache–Wirkung Beziehung besteht.

Die kausale Unabhängigkeit von Haarausfall und Geschlecht erkennt man, indem man die Häufigkeitstabellen getrennt nach Geschlechtern ansieht:

Männer

	F	F'	
H	$0,04$	$0,01$	$0,05$
H'	$0,76$	$0,19$	$0,95$
$'$	$0,80$	$0,20$	

Frauen

	F	F'	
H	$0,19$	$0,76$	$0,95$
H'	$0,01$	$0,04$	$0,05$
	$0,20$	$0,80$	

In jeder einzelnen Tabelle herrscht Unabhängigkeit, aber bei Überlagerung der beiden Tabellen mit 50 % Mänern und 50 % Frauen entsteht die anfangs angegebene Tabelle mit einer starken Koppelung von Haarausfall und Haushaltsarbeit.

(9.29) BEMERKUNG:

Mit etwas Mühe kann man die folgende Gleichung für die Koppelung von zwei Ereignissen A und B unter Beteiligung eines dritten Ereignisses C aufstellen:

$$\begin{aligned} P(A\cap B) - P(A)P(B) \quad = \quad & \Big(\underbrace{P(A\cap B|C) - P(A|C)P(B|C)}_{\text{Koppelung unter } C} \Big)\, P(C) \\ & + \Big(\underbrace{P(A\cap B|C') - P(A|C')P(B|C')}_{\text{Koppelung unter } C'} \Big)\, P(C) \\ & + \underbrace{\Big(P(A|C) - P(A|C') \Big)\Big(P(B|C) - P(B|C') \Big)}_{\text{Einfluß von } C}\, P(C)P(C'). \end{aligned}$$

Die Koppelung der Ereignisse A und B setzt sich also aus mehreren Bestandteilen zusammen:

- Aus der Koppelung von A und B unter C.
- Aus der Koppelung von A und B unter C'.
- Aus dem Einfluß, den C auf die Wahrscheinlichkeiten von A und B ausübt.

Insbesondere kann es sein, daß die Ereignisse A und B unter C und C' stochastisch unabhängig sind und ihre Koppelung nur darauf zurückzuführen ist, daß sie unter C bzw. C' unterschiedlich wahrscheinlich sind.

Genau dieser Fall liegt im Beispiel (9.28) vor. Auf Männer bzw. Frauen eingeschränkt sind die Ereignisse H und F stochastisch unabhängig. Ihre Koppelung rührt allein daher, daß sie für Männer und Frauen unterschiedlich wahrscheinlich sind.

(9.30) DEFINITION: *Eine stochastische Koppelung von Ereignissen heißt* **Scheinkoppelung**, *wenn sie ausschließlich durch eine versteckten Faktor bewirkt wird.*

Wir fassen die Grundsätze für die Interpretation von Koppelungen nochmals zusammen:

- Eine bestehende Koppelung ist kein Beweis für einen kausalen Zusammenhang.
- Kausale Interpretationen sind immer nur als vorläufige Theorien anzusehen, da ein versteckter Faktor noch nicht entdeckt sein könnte.

(9.31) AUFGABE

Interpretieren Sie die Koppelung in Beispiel (9.22).

Mögliche Antwort: Eine kausale Interpretation der Koppelung ist nicht zwingend. Es wäre denkbar, daß Rostschäden und Hohlraumversiegelung stochastisch unabhängig sind. Der versteckte Faktor, der die Koppelung verursacht, könnte im Pflegeaufwand des Autobesitzers liegen.

Bei Autobesitzern mit hohem Pflegeaufwand treten seltener Rostschäden auf und es besteht eine höhere Neigung zu Maßnahmen wie einer Hohlraumversiegelung. Deshalb ist anzunehmen, daß ein gewisser Teil der negativen Koppelung zwischen Rostschäden und Hohlraumversiegelung eine Scheinkoppelung ist.

Um nachzuprüfen, ob über den Einfluß des Pflegeaufwandes hinaus eine Koppelung besteht, muß man Autos getrennt nach Besitzern mit hohem bzw. geringem Pflegeaufwand untersuchen: **Man muß bei der Untersuchung den versteckten Faktor konstant halten.**

Das Kontingenzproblem

Wir nehmen nun an, daß die Wahrscheinlichkeiten der Ereigniskombinationen nicht bekannt sind, sondern daß nur relative Häufigkeiten zur Verfügung stehen. Wir kennen also die

Kontingenztafel (Vierfeldertafel):

	B	B'	
A	$f(A \cap B)$	$f(A \cap B')$	$f(A)$
A'	$f(A' \cap B)$	$f(A' \cap B')$	$f(A')$
	$f(B)$	$f(B')$	

Selbst wenn die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, wird die Kontingenztafel auf Grund von Zufallsschwankungen eine gewisse Koppelung aufweisen. Wir fragen uns nun, ob die beiden Ereignisse A und B tatsächlich gekoppelt sind.

(9.32) DEFINITION: *Unter einem* **Test für das Kontingenzproblem** *versteht man ein Verfahren, das eine Entscheidung zwischen den Aussagen*

Nullhypothese:	*A und B sind stochastisch unabhängig*
Alternative:	*A und B sind gekoppelt*

herbeiführt. Die Entscheidung wird auf Grund von empirischen Daten getroffen.

Als Grundlage eines Tests dient dabei die

Empirische Vierfelderkorrelation:

$$\boxed{\hat{\rho} = r = \frac{f(A \cap B) - f(A)f(B)}{\sqrt{f(A)f(A')f(B)f(B')}}.}$$

Die empirische Vierfelderkorrelation r ist ein Schätzer der Vierfelderkorrelation ρ. Sind die Ereignisse stochastisch unabhängig, dann ist zwar $\rho = 0$, aber die empirische Vierfelderkorrelation kann auf Grund zufälliger Schwankungen von Null verschieden sein. Ihre Standardabweichung beträgt etwa $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Daraus ergibt sich das Prüfverfahren.

Prüfverfahren:

Das Prüfverfahren beruht auf der standardisierten Vierfelderkorrelation $T = \sqrt{n}r$ als Testgröße. Trifft die Nullhypothese der Unabhängigkeit zu, so gilt $-2 \leq \sqrt{n}r \leq 2$ mit 95 % Sicherheit. Ist das nicht der Fall, so ist es plausibel anzunehmen, daß die Nullhypothese nicht zutrifft. Wir sagen dann, die empirische Koppelung ist signifikant.

Es gibt insgesamt drei Möglichkeiten:

$-2 \leq \sqrt{n}r \leq 2$: Das Ergebnis ist nicht signifikant, weil die empirische Koppelung mit der Nullhypothese der Unabhängigkeit vereinbar ist. Es aber auch keine Entscheidung zugunsten der Nullhypothese möglich, weil die Daten natürlich auch mit einer geringen Koppelung $\rho \neq 0$ der Ereignisse vereinbar sind.

$\sqrt{n}r < -2$: Das Ergebnis ist signifikant, weil die empirische Koppelung nicht mit der Hypothese der Unabhängigkeit vereinbar ist. Da $r < 0$, erfolgt die Entscheidung zugunsten einer negativen Koppelung.

$\sqrt{n}r > 2$: Das Ergebnis ist signifikant, weil die empirische Koppelung nicht mit der Hypothese der Unabhängigkeit vereinbar ist. Da $r > 0$, erfolgt die Entscheidung zugunsten einer positiven Koppelung.

(9.33) AUFGABE

Prüfen Sie anhand der DEMO–Daten die Hypothese der Unabhängigkeit für die Merkmale Flugangst und Schulbildung.

(Die beiden Merkmale haben jeweils zwei Ausprägungen. Man spricht von Unaghängigkeit bzw. von Koppelung der Merkmale, wenn die Ereignisse, bestimmte Ausprgüngen zu beobachten, unabhängig bzw. gekoppelt sind.)

Lösung: Die Kontingenztafel lautet:

	$FF = 0$	$FF = 1$	
$EE = 0$	55	10	65
$EE = 1$	14	21	35
	69	31	100

Daraus ergibt sich für $r = 0,4601$ und daher $\sqrt{n}r = 4,601$. Das heißt, die Koppelung der Daten ist signifikant. Daraus folgt, daß die Hypothese der Unabhängigkeit für die beiden Merkmale verworfen werden kann. Die beiden Merkmale sind gekoppelt.

Das Symmetrieproblem

Wir nehmen wieder an, daß die Wahrscheinlichkeiten der Ereigniskombinationen nicht bekannt sind, sondern daß nur relative Häufigkeiten zur Verfügung stehen. Wir kennen also wieder die

Kontingenztafel (Vierfeldertafel):

	B	B'	
A	$f(A \cap B)$	$f(A \cap B')$	$f(A)$
A'	$f(A' \cap B)$	$f(A' \cap B')$	$f(A')$
	$f(B)$	$f(B')$	

Wir interessieren uns aber jetzt nicht für die Koppelung der Ereignisse A und B, sondern wir wollen prüfen, ob die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ übereinstimmen oder ob sie verschieden sind.

(9.34) DEFINITION: *Ein* **Test für den Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten** *im Rahmen eines* **Symmetrieproblems** *ist ein Verfahren, welches eine Entscheidung zwischen den Aussagen*

Nullhypothese:	$P(A) = P(B)$
Alternative:	$P(A) \neq P(B)$

herbeiführt. Die Entscheidung wird auf Grund von empirischen Daten getroffen, bei denen $f(A)$ *und* $f(B)$ *aus* **einer** *Stichprobe gewonnen werden.*

Da wir die Ereignisse A und B nicht in getrennten unabhängigen Stichproben beobachten, können wir die Methoden aus Abschnitt 4 nicht anwenden.

Die Prüfmethode beruht darauf, nur solche Daten in die Analyse einzubeziehen, bei denen genau eines der beiden Ereignisse eintritt. Man schränkt also die Daten ein auf Realisierungen des Ereignisses

$$C = (A \cap B') \cup (A' \cap B).$$

In der Kontingenztafel stehen die Häufigkeiten dieser Ereignisse in der Nebendiagonale:

	B	B'	
A	$f(A \cap B)$	$\boxed{f(A \cap B')}$	$f(A)$
A'	$\boxed{f(A' \cap B)}$	$f(A' \cap B)$	$f(A')$
	$f(B)$	$f(B')$	

Als theoretische Grundlage für den Test dient:

(9.35) SATZ: *Die Ereignisse A und B sind genau dann gleichwahrscheinlich, wenn* $P(A|C) = \frac{1}{2}$.

Daraus ergibt sich als

Prüfverfahren:
Das Prüfverfahren beruht auf dem Standardscore der relativen Häufigkeit $f(A|C)$ und ist somit ein Spezialfall des Tests einer Hypothese über eine Wahrscheinlichkeit.

(9.36) AUFGABE

Vergleichen Sie anhand der DEMO–Daten die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Hochschulreife", „Flugangst".

Lösung: Die Kontingenztafel lautet:

	$FF = 0$	$FF = 1$	
$EE = 0$	55	$\boxed{10}$	65
$EE = 1$	$\boxed{14}$	21	35
	69	31	100

Bezeichnen wir $A = (EE = 1)$ und $B = (FF = 1)$, so ergibt sich

$$f(A|C) = \frac{14}{14 + 10} = \frac{14}{24}.$$

Das Ereignis C hat $n = 14 + 10 = 24$ Realisationen und der Standard–Score von $f(A|C)$ beträgt daher

$$\frac{f(A|C) - 0,5}{\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{h(C)}}} = 0,816.$$

Dieser Wert ist nicht signifikant. Die Hypothese der Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten kann daher nicht verworfen werden.

(9.37) AUFGABE

In einer Studie zur Aggressivität sollte festgestellt werden, ob es sich bei dieser Eigenschaft eher um eine situationsbedingte Verhaltensweise oder um ein stabiles Persönlichkeitsmerkmal handelt. Von 50 Fußballern wurden 25 aufgrund ihres Verhaltens in einem Meisterschaftskampf als aggressiv, die übrigen als nicht aggressiv klassifiziert. Die Beurteilung ihres Verhaltens in einer Alltagssituation hinsichtlich des Merkmals Aggressivität ergab bei 15 von ihnen eine Einstufung als aggressiv, 20 Sportler wurden in beiden Situationen als nicht aggressiv bezeichnet.

(a) Prüfen Sie, ob sich der Anteil an aggressiven Personen in der Wettkampf– und in der Alltagssituation unterscheidet.

(b) Stellen Sie fest, ob es sich bei Aggressivität eher um eine situationsbedingte Verhaltensweise oder um ein stabiles Persönlichkeitsmerkmal handelt.

Lösung: Es sei $A =$„Die Person reagiert aggressiv in einer Alltagssituation” und $B =$„Die Person reagiert aggressiv in einer Kampfsituation”. Die Kontingenztafel lautet

	B	B'	
A	10	5	15
A'	15	20	35
	25	25	

(a) Die Prüfung von $P(A) = P(B)$ ist das Symmetrieproblem. Die relative Häufigkeit beträgt

$$f(A|C) = \frac{5}{5+15} = 0,25$$

und damit ergibt sich für den Wert der Testgröße

$$\frac{0,25 - 0,5}{\frac{1}{2\sqrt{20}}} = -2,34.$$

Dieser Wert ist signifikant und damit ist bewiesen, daß die beiden Wahrscheinlichkeiten verschieden sind: $P(A|C) < 0,5$. Es sind mehr Personen in einer Kampfsituation aggressiv als in einer Alltagssituation.

(b) Die zweite Frage betrifft die Koppelung der Ereignisse A und B.

Handelt es sich bei der Aggressivität um eine rein situationsbedingte Verhaltenweise, bei der keine Persönlichkeitsmerkmale eine Rolle spielen, dann liefert die Beobachtung einer aggressiven Reaktion im Alltag keinen Hinweis auf die Neigung zu einer aggressiven Reaktion in einer Kampfsituation. Die Ereignisse A und B sind dann stochastisch unabhängig.

Handelt es sich dagegen bei der Aggressivität um ein stabiles Persönlichkeitsmerkmal, dann neigen Personen je nach Persönlichkeitsstruktur entweder häufig oder selten zu aggressivem Verhalten. Die Ereignisse A und B sind dann gekoppelt.

Wir überprüfen die Koppelung mit der Vierfelderkorrelation

$$r(A,B) = \frac{0,2 - 0,3 \cdot 0,3}{\sqrt{0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0,48.$$

Der standardisierte Wert beträgt $\sqrt{n}r = \sqrt{50} \cdot 0,48 = 3,394$ und ist daher signifikant. Die Hypothese der Unabhängigkeit kann verworfen werden. Die Aggressivität ist eher ein stabiles Persönlichkeitsmerkmal.

(9.38) TESTFRAGEN

1. Wann sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig? Geben Sie ein Beispiel zweier unabhängiger Ereignisse.
2. Richtig oder falsch: Das unmögliche (sichere) Ereignis ist von jedem anderen Ereignis stochastisch unabhängig. Begründen Sie ihre Antwort.
3. Was versteht man unter Koppelung bzw. stochastischer Unabhängigkeit von Ereignissen? Was ist die Richtung einer Koppelung?
4. Wie beurteilt man Stärke und Richtung der Koppelung von Ereignissen?
5. Welche Ursachen kann eine Koppelung von Ereignissen haben? Geben Sie Beispiele für die Möglichkeiten.
6. Erläutern Sie den Begriff einer Scheinkoppelung von Ereignissen.
7. Welche Fragen kann man mit Hilfe einer empirischen Vierfeldertafel beantworten und wie macht man das?
8. Was ist das Kontingenzproblem für Ereignisse und wie analysiert man es?
9. Was ist das Symmetrieproblem für Ereignisse und wie analysiert man es?

9.3 Gekoppelte Merkmale

Wir untersuchen zwei qualitative Merkmale mit den alternativen Ausprägungen $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ und $(B_1, B_2, \ldots, B_s)$. Diese Merkmale werden an n Untersuchungsobjekten erhoben. Das heißt, für jedes Untersuchungsobjekt wird die auftretende Kombination $A_i \cap B_j$ von Ausprägungen festgestellt. Es sind insgesamt $r \times s$ Kombinationen möglich.

Der Übersichtlichkeit halber ordnet man die Häufigkeiten der Kombinationen in einer Tabelle an.

Kontingenztafel:

Die Kontingenztafel ist die Häufigkeitstabelle der Kombinationen $A_i \cap B_j$.

	B_1	B_2	$\ldots$	B_s	
A_1	$f(A_1 \cap B_1)$	$f(A_1 \cap B_2)$	$\ldots$	$f(A_1 \cap B_s)$	$f(A_1)$
A_2	$f(A_2 \cap B_1)$	$f(A_2 \cap B_2)$	$\ldots$	$f(A_2 \cap B_s)$	$f(A_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$f(A_r \cap B_1)$	$f(A_r \cap B_2)$	$\ldots$	$f(A_r \cap B_s)$	$f(A_r)$
	$f(B_1)$	$f(B_2)$	$\ldots$	$f(B_s)$	

An den Rändern der Tabelle werden die Zeilensummen und Spaltensummen eingetragen, die man auch **Randverteilungen** nennt. Die Randverteilungen sind identisch mit den Häufigkeitsverteilungen der einzelnen Merkmale.

(9.39) Aufgabe

Bestimmen Sie anhand der DEMO–Daten die Kontingenztafeln der Merkmale Bekenntnis und Videofilm bzw. Sternbild und Bekenntnis.

Lösung:

	$VI = 1$	$VI = 2$	$VI = 3$	$VI = 4$	
$CO = 1$	0.04	0.13	0.10	0.06	0.33
$CO = 2$	0.06	0.10	0.06	0.05	0.27
$CO = 3$	0.02	0.04	0.07	0.00	0.13
$CO = 4$	0.07	0.04	0.00	0.04	0.15
$CO = 5$	0.06	0.02	0.02	0.02	0.12
	0.25	0.33	0.25	0.17	1.00

	$CO = 1$	$CO = 2$	$CO = 3$	$CO = 4$	$CO = 5$	
$ZO = 1$	0.03	0.03	0.01	0.00	0.01	0.08
$ZO = 2$	0.00	0.01	0.01	0.02	0.01	0.05
$ZO = 3$	0.01	0.02	0.01	0.02	0.02	0.08
$ZO = 4$	0.01	0.03	0.01	0.02	0.01	0.08
$ZO = 5$	0.04	0.03	0.01	0.00	0.01	0.09
$ZO = 6$	0.04	0.01	0.02	0.01	0.01	0.09
$ZO = 7$	0.06	0.02	0.01	0.02	0.01	0.12
$ZO = 8$	0.02	0.00	0.02	0.02	0.01	0.07
$ZO = 9$	0.02	0.06	0.02	0.00	0.01	0.11
$ZO = 10$	0.03	0.04	0.00	0.00	0.01	0.08
$ZO = 11$	0.04	0.01	0.00	0.00	0.01	0.06
$ZO = 12$	0.03	0.01	0.01	0.04	0.00	0.09
	0.33	0.27	0.13	0.15	0.12	1.00

Wir interessieren uns dafür, ob die Ausprägungen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ des ersten Merkmals mit den Ausprägungen $B_1, B_2, \ldots, B_s$ des zweiten Merkmals gekoppelt sind, und wie die Struktur dieser Koppelung aussieht.

Um die Koppelung der Merkmale zu untersuchen, setzen wir voraus, daß die Daten aus einem Zufallsexperiment stammen, bei dem die Merkmalskombinationen $A_i \cap B_j$ bestimmte Wahrscheinlichkeiten $P(A_i \cap B_j)$ besitzen.

(9.40) DEFINITION: *Zwei stochastische Merkmale mit den alternativen Ausprägungen* $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ *und* $(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ *heißen* **stochastisch unabhängig**, *wenn*

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) \text{ für alle Kombinationen } A_i \cap B_j.$$

Ist das nicht der Fall, dann sind die beiden Merkmale **gekoppelt**.

(9.41) DEFINITION: *Unter einem* **Test für das Kontingenzproblem** *versteht man ein Verfahren, das eine Entscheidung zwischen den Aussagen*

Nullhypothese:	*Die Merkmale sind stochastisch unabhängig.*
Alternative:	*Die Merkmale sind gekoppelt.*

herbeiführt. Die Entscheidung wird auf Grund empirischer Daten getroffen.

Um die Koppelung der Merkmale anhand von Datenmaterial zu beurteilen, vergleicht man die Kontingenztafel mit der

Indifferenztafel:

Die Indifferenztafel enthält jene Häufigkeiten der Kombinationen $A_i \cap B_j$, die bei stochastischer Unabhängigkeit erwarten würde:

	B_1	B_2	$\ldots$	B_s	
A_1	$f(A_1)f(B_1)$	$f(A_1)f(B_2)$	$\ldots$	$f(A_1)f(B_s)$	$f(A_1)$
A_2	$f(A_2)f(B_1)$	$f(A_2)f(B_2)$	$\ldots$	$f(A_2)f(B_s)$	$f(A_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$f(A_r)f(B_1)$	$f(A_r)f(B_2)$	$\ldots$	$f(A_r)f(B_s)$	$f(A_r)$
	$f(B_1)$	$f(B_2)$	$\ldots$	$f(B_s)$	

Selbst wenn die beiden Merkmale stochastisch unabhängig sind, wird die Kontingenztafel auf Grund von Zufallschwankungen eine gewisse emipirische Koppelung aufweisen, dh. sie wird sich von der Indifferenztafel unterscheiden. Um das Ausmaß die Richtung und die Signifikanz dieser Unterschiede zu beurteilen, standardisieren wir die Differenzen der Tabelleneinträge, dh. wir berechnen die Größen

$$\sqrt{n}r^*(A_i, B_j) = \sqrt{n}\frac{f(A_i \cap B_j) - f(A_i)f(B_j)}{\sqrt{f(A_i)f(B_j)}}.$$

Bei diesen Größen $\sqrt{n}r^*(A_i, B_j)$ handelt es sich im wesentlichen um die standardisierten empirischen Vierfelderkorrelationen. Im Nenner fehlen allerdings die Faktoren $\sqrt{f(A_i')} = \sqrt{1 - f(A_i)}$ und $\sqrt{f(B_j')} = \sqrt{1 - f(B_j)}$. Dies hat den gleichen Grund, den wir schon bei der Bildung der standardisierten Häufigkeitsverteilung angedeutet haben. Auch dort sind wir von der ursprünglichen Definition der Standard–Scores abgewichen, indem wir im Nenner ähnliche Faktoren weggelassen haben.

Die Tabelle der standardisierten Differenzen zwischen Kontingenztafel und Indifferenztafel ermöglicht eine erste Beurteilung der Struktur und Signifikanz vorhandener Koppelungen.

Struktur der Koppelung: Das Vorzeichenmuster der Differenzen gibt Hinweise darauf, wo sich Ausprägungen der beiden Merkmale begünstigen oder behindern.

Signifikanz der Koppelung: Als Faustregel gilt, daß bei stochastischer Unabhängigkeit der Maximalwert der standardisierten Differenzen mit hinreichender statistischer Sicherheit dem Betrage nach ≤ 3 sein muß.

Jene standardisierten Differenzen, die dem Betrag nach > 3 sind, geben einen Hinweis auf signifikante Koppelungen zwischen einzelnen Ausprägungen.

(9.42) Aufgabe

Untersuchen Sie anhand der DEMO–Daten die Koppelung der Merkmale Bekenntnis und Videofilm bzw. Sternbild und Bekenntnis.

Lösung:

Indifferenztafel

	$VI=1$	$VI=2$	$VI=3$	$VI=4$
$CO=1$	0.0825	0.1089	0.0825	0.0561
$CO=2$	0.0675	0.0891	0.0675	0.0459
$CO=3$	0.0325	0.0429	0.0325	0.0221
$CO=4$	0.0375	0.0495	0.0375	0.0255
$CO=5$	0.0300	0.0396	0.0300	0.0204

Standardisierte Differenzen

	$VI=1$	$VI=2$	$VI=3$	$VI=4$
$CO=1$	−1.4797	0.6394	0.6093	0.1647
$CO=2$	−0.2887	0.3652	−0.2887	0.1914
$CO=3$	−0.6934	−0.1400	2.0801	−1.4866
$CO=4$	1.6783	−0.4270	−1.9365	0.9080
$CO=5$	1.7321	−0.9849	−0.5774	−0.0280

Indifferenztafel

	$CO=1$	$CO=2$	$CO=3$	$CO=4$	$CO=5$
$ZO=1$	0.0264	0.0216	0.0104	0.0120	0.0096
$ZO=2$	0.0165	0.0135	0.0065	0.0075	0.0060
$ZO=3$	0.0264	0.0216	0.0104	0.0120	0.0096
$ZO=4$	0.0264	0.0216	0.0104	0.0120	0.0096
$ZO=5$	0.0297	0.0243	0.0117	0.0135	0.0108
$ZO=6$	0.0297	0.0243	0.0117	0.0135	0.0108
$ZO=7$	0.0396	0.0324	0.0156	0.0180	0.0144
$ZO=8$	0.0231	0.0189	0.0091	0.0105	0.0084
$ZO=9$	0.0363	0.0297	0.0143	0.0165	0.0132
$ZO=10$	0.0264	0.0216	0.0104	0.0120	0.0096
$ZO=11$	0.0198	0.0162	0.0078	0.0090	0.0072
$ZO=12$	0.0297	0.0243	0.0117	0.0135	0.0108

Standardisierte Differenzen

	$CO=1$	$CO=2$	$CO=3$	$CO=4$	$CO=5$
$ZO=1$	0.2216	0.5715	−0.0392	−1.0954	0.0408
$ZO=2$	−1.2845	−0.3012	0.4341	1.4434	0.5164
$ZO=3$	−1.0094	−0.1089	−0.0392	0.7303	1.0614
$ZO=4$	−1.0094	0.5715	−0.0392	0.7303	0.0408
$ZO=5$	0.5977	0.3657	−0.1572	−1.1619	−0.0770
$ZO=6$	0.5977	−0.9173	0.7673	−0.3012	−0.0770
$ZO=7$	1.0251	−0.6889	−0.4484	0.1491	−0.3667
$ZO=8$	−0.2040	−1.3748	1.1426	0.9271	0.1746
$ZO=9$	−0.8555	1.7582	0.4767	−1.2845	−0.2785
$ZO=10$	0.2216	1.2520	−1.0198	−1.0954	0.0408
$ZO=11$	1.4356	−0.4871	−0.8832	−0.9487	0.3300
$ZO=12$	0.0174	−0.9173	−0.1572	2.2808	−1.0392

Die Chiquadratmethode

Die Chiquadratmethode ist der klassische Signifikanztest für das Kontingenzproblem.

(9.43) DEFINITION: *Unter der Chiquadrat–Größe (für das Kontingenzproblem) versteht man die Quadratsumme*

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} n\, r^*(A_i, B_j)^2.}$$

der standardisierten Differenzen zwischen Kontingenztafel und Indifferenztafel.

Diese Chiquadrat–Größe hat $df = (r-1)(s-1)$ Freiheitsgrade. Daraus ergibt sich als

Prüfverfahren:

Wenn die Chiquadrat–Größe den kritischen Wert $df + 3\sqrt{df}$ übersteigt, dann wird die Nullhypothese verworfen.

(9.44) AUFGABE

Beurteilen Sie anhand der DEMO–Daten die Signifikanz der Koppelung bei den Merkmalen Bekenntnis und Videofilm bzw. Sternbild und Bekenntnis.

Lösung: Die Chiquadratgröße für die Koppelung der Merkmale CO und VI beträgt $\chi^2 = 22,2482$. Diese Größe besitzt $df = 3 \cdot 4 = 12$ Freiheitsgrade und lautet der kritische Wert $12 + 3\sqrt{12} = 22,39$. Also hat die Chiquadratgröße einen fast signifikanten Wert.

Die Chiquadratgröße für die Koppelung der Merkmale ZO und CO beträgt $\chi^2 = 41,0699$. Diese Größe besitzt $df = 4 \cdot 11 = 44$ Freiheitsgrade und lautet der kritische Wert $44 + 3\sqrt{44} = 63,9$. Die Chiquadratgröße ist nicht signifikant.

(9.45) Testfragen

1. Was versteht man unter Koppelung bzw. stochastischer Unabhängigkeit von qualitativen Merkmalen?
2. Wie beurteilt man Stärke und Richtung der Koppelung von qualitativen Merkmalen?
3. Welche Ursachen kann eine Koppelung von qualitativen Merkmalen haben? Geben Sie Beispiele für die Möglichkeiten.
4. Was ist eine Kontingenztafel? Wie analysiert man eine Kontingenztafel? Welche Bedeutung haben Zeilensummen und Spaltensummen einer Kontingenztafel?
5. Wie analysiert man das Signifikanzproblem bei einer empirischen Kontingenztafel?
6. Was kann man aus einer empirischen Kontingenztafel ablesen?
7. Diskutieren Sie folgende Möglichkeiten in Zusammenhang mit einer Kontingenztafel mit zwei qualitativen Merkmalen A und B:
   (a) Die absoluten Häufigkeiten der Randverteilung von A stimmen mit den absoluten Häufigkeiten in einer Spalte überein.
   (b) Die relativen Häufigkeiten der Randverteilungen von A stimmen mit den relativen Häufigkeiten in jeder Spalte überein.
8. Zwei qualitative Merkmale seien stark gekoppelt. Hilft die Kenntnis der Ausprägung eines Merkmals bei der Prognose der Ausprägung des anderen Merkmals? Begründen Sie ihre Antwort?
9. Wie äußert sich eine kausale Beziehung zwischen zwei qualitativen Merkmalen?
10. Geben Sie ein Beispiel für die Koppelung qualitativer Merkmale, die nicht auf Kausalität zwischen den Merkmalen zurückzuführen ist!
11. Kann man kausale Beziehungen zwischen zwei qualitativen Merkmalen beweisen, widerlegen? Wie geht man dabei vor?