Statistik – Einführung

Tests auf einen Parameter
Kapitel 8

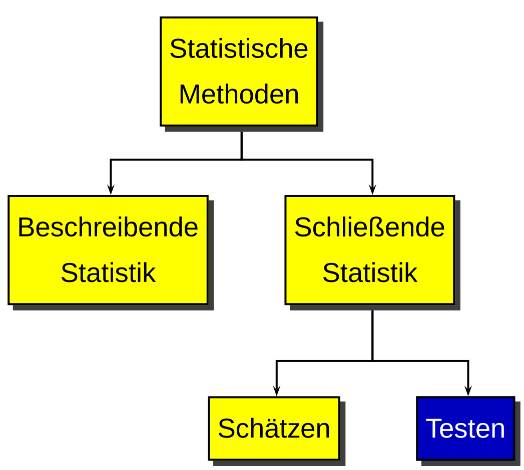
Statistik – WU Wien

Gerhard Derflinger · Michael Hauser · Jörg Lenneis · Josef Leydold · Günter Tirler · Rosmarie Wakolbinger

Lernziele

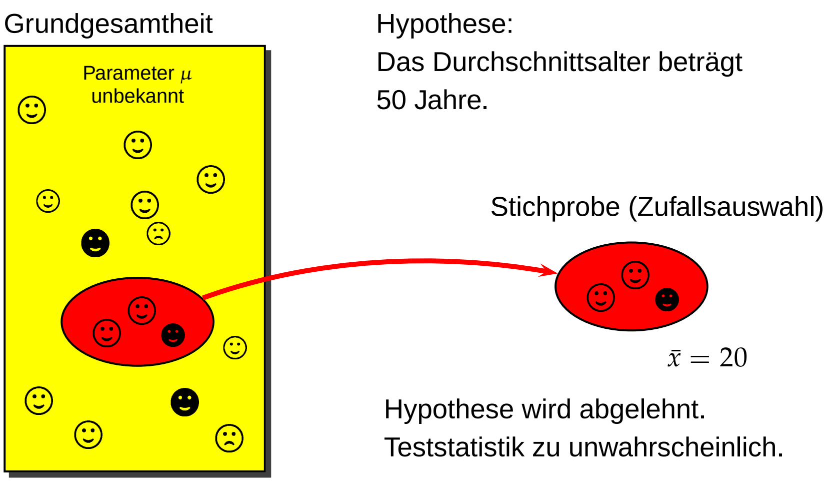
1. Beschreiben Test und Hypothese.
2. Unterscheiden Arten von Hypothesen.
3. Beschreiben das Testen von Hypothesen.
4. Erklären den Ablehnungsbereich und den p-Wert.
5. Lösen das (Hypothesen-)Testproblem für einen Parameter.
6. Definieren den Fehler 1. und 2. Art.
7. Erklären die Macht eines Tests.

Statistische Methode



Testen von Hypothesen

Testen von Hypothesen



Hypothese:
Das Durchschnittsalter beträgt 50 Jahre.

Hypothese wird abgelehnt.
Teststatistik zu unwahrscheinlich.

Was ist eine Hypothese ?

- **Hypothese** ist eine Annahme (Vermutung) über einen Parameter (etc.) der Grundgesamtheit.
  - Mittel (Erwartungswert), Anteil, Varianz, Form der Verteilung, ...
  - Sie muss **vor** der Analyse formuliert werden!

Beispiel:
Ich vermute (behaupte), dass das monatliche Durschnitts-einkommen aller WU-Studentinnen 700 € beträgt.

- Was wird getestet? Z.B.: Durchschnittliches Einkommen μ.
- Ist eine Aussage über einen Parameter.
- Irrtümliche Ablehnung hat schwerwiegende Konsequenzen.
- Wird mit H_0 bezeichnet.
- Enthält **immer** Gleichheitszeichen: $=$, $\leq$ oder $\geq$.
- Wird immer formuliert als:

$$\boxed{H_0\colon \mu = \mu_0 \quad \text{(Zahlenwert)}}$$

Das Gleichheitszeichen steht auch für $\leq$ oder $\geq$.

Alternativ-Hypothese

- Gegenteil („Verneinung") der Null-Hypothese.
- Wird mit H_A (auch H_1) bezeichnet.
- Enthält **immer** Ungleichheitszeichen: $\neq$, $<$ oder $>$.
- Wird immer auf eine der drei Arten formuliert:

$$\boxed{H_A\colon \mu \neq \mu_0 = \text{Zahl}} \quad \text{oder} \quad \boxed{H_A\colon \mu < \mu_0 = \text{Zahl}}$$

oder

$$\boxed{H_A\colon \mu > \mu_0 = \text{Zahl}}$$

Hängt von H_0 ab.

- **Enthält oft das, was man eigentlich wissen will!**

Beispiel

Überprüfe, ob das monatliche Durchschnittseinkommen von WU-Studentinnen verschieden von 700 € ist.

1. Formuliere die Frage statistisch korrekt: $\mu \neq 700$.
2. Formuliere das Gegenteil statistisch korrekt: $\mu = 700$.
3. Gib die Alternativ-Hypothese an: $H_A\colon \mu \neq 700$.
   - Hat $\neq$, $<$ oder $>$ Zeichen.
4. Gib die Null-Hypothese an: $H_0\colon \mu = 700$.

Beträgt der durchschnittliche tägliche Fernsehkonsum von 14-jährigen 3.4 Stunden?

1. Formuliere die Frage statistisch korrekt: $\mu = 3.4$.
2. Formuliere die Verneinung statistisch korrekt: $\mu \neq 3.4$.
3. Gib die Alternativ-Hypothese an: $H_A\colon \mu \neq 3.4$.
4. Gib die Null-Hypothese an: $H_0\colon \mu = 3.4$.

Beispiel

Ist der durchschnittliche tägliche Fernsehkonsum von 14-jährigen **verschieden** von 3.4 Stunden?

1. Formuliere die Frage statistisch korrekt: $\mu \neq 3.4$.
2. Formuliere die Verneinung statistisch korrekt: $\mu = 3.4$.
3. Gib die Alternativ-Hypothese an: $H_A\colon \mu \neq 3.4$.
4. Gib die Null-Hypothese an: $H_0\colon \mu = 3.4$.

Beispiel

Beträgt der durchschnittliche tägliche Fernsehkonsum von 14-jährigen **höchstens** 3.4 Stunden?

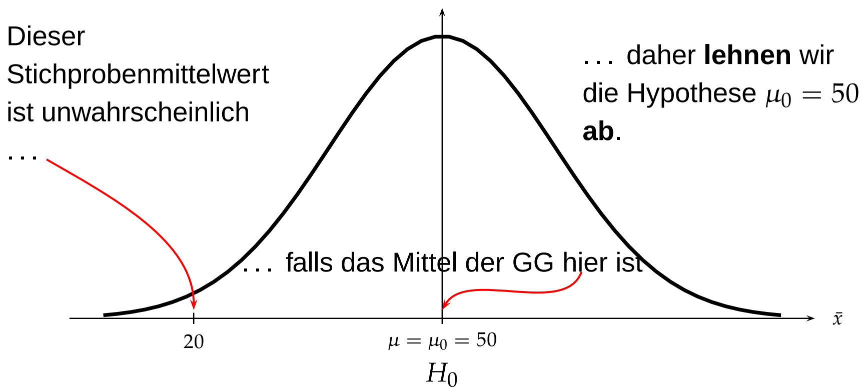
1. Formuliere die Frage statistisch korrekt: $\mu \leq 3.4$.
2. Formuliere die Verneinung statistisch korrekt: $\mu > 3.4$.
3. Gib die Alternativ-Hypothese an: $H_A\colon \mu > 3.4$.
4. Gib die Null-Hypothese an: $H_0\colon \mu = 3.4$.

Gibt ein Tourist in Wien durchschnittlich **mehr** als 400 € pro Tag aus?

1. Formuliere die Frage statistisch korrekt: $\mu > 400$.
2. Formuliere die Verneinung statistisch korrekt: $\mu \leq 400$.
3. Alternativ-Hypothese: $H_A\colon \mu > 400$.
4. Null-Hypothese: $H_0\colon \mu = 400$.

Testen von Hypothesen // Grundidee

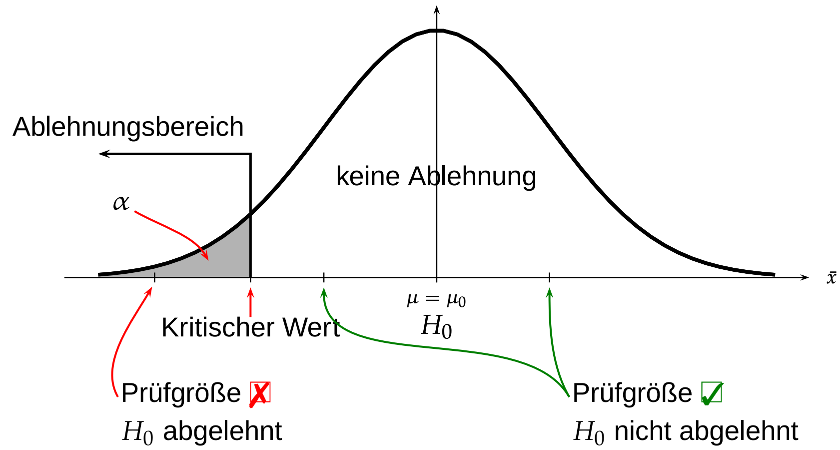
Stichprobenverteilung für $\bar{X}$



Signifikanzniveau

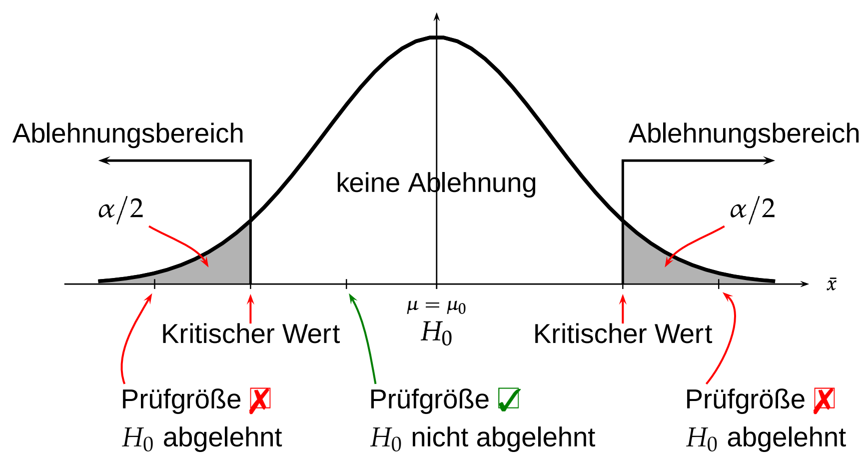
- Ist eine Wahrscheinlichkeit.
- Ist die Wahrscheinlichkeit für **seltene** (unwahrscheinliche) Werte der Teststatistik falls die Null-Hypothese zutrifft.
  - Diese Werte bilden den **Ablehnungsbereich** der Stichprobenverteilung.
- Wird mit α bezeichnet.
  - Typische Werte sind: 1%, 5%, oder 10%.
- Wird **vor** dem Test vom Statistiker festgelegt.

Stichprobenverteilung für $\bar{X}$



Zweiseitiger Test

Stichprobenverteilung für $\bar{X}$



Fehler beim Testen

- **Fehler 1. Art** (α-Fehler)
  - Ablehnen der **richtigen** Null-Hypothese.
  - Die Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art ist α. (Wird vom Statistiker vorgegeben.)
  - **Signifikanzniveau**.
- **Fehler 2. Art** (β-Fehler)
  - **Falsche** Null-Hypothese wird nicht abgelehnt.
  - Die Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art ist β. (Meist nicht bekannt.)
  - $(1-\beta)$ heißt **Macht** des Tests.

Fehler beim Testen

H_0: $\mu = \mu_0$.
H_A: $\mu \neq \mu_0$.

Wahrscheinlichkeiten für Fehler
und richtige Entscheidungen:

	Sachverhalt	
Entscheidung	H_0 wahr	H_0 falsch
H_0 akzeptiert	$(1-\alpha)$	β-Fehler
H_0 abgelehnt	α-Fehler	Macht $(1-\beta)$

Wahrscheinlichkeit für richtig Entscheidung.

Fehler beim Testen

H_0: Unschuldig.
H_A: Schuldig.

Gericht:

	Sachverhalt	
Urteil	unschuldig	schuldig
unschuldig	✓	✗
schuldig	✗	✓

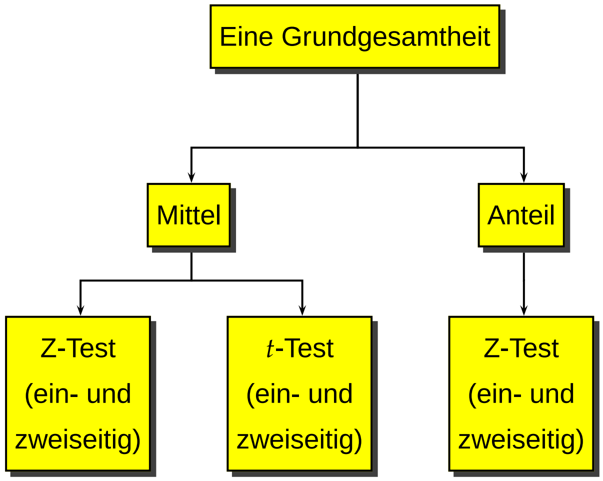
- Wert des Parameters in der Grundgesamtheit.
  - β wird größer, wenn der Abstand zu H_0 kleiner wird: H_0 und H_A sind schwieriger zu unterscheiden.
- Signifikanzniveau α.
  - β wird größer, wenn α kleiner wird: Der Annahmebereich wird größer.
  - α-Fehler und β-Fehler hängen zusammen.
  - Es ist nicht möglich, beide Fehler simultan zu verkleinern.

Einfluss auf β-Fehler

- Standardabweichung σ in der Grundgesamtheit.
  - β wird größer, wenn σ größer wird: Die Unsicherheit in der Stichprobe wird gößer.
- Stichprobenumfang n.
  - β wird größer, wenn n kleiner wird: Die Unsicherheit in der Stichprobe wird größer.

Testen von Hypothesen // Vorgangsweise

1. Aufstellen von Null-Hypothese $\boldsymbol{H_0}$ und Alternativ-Hypothese $\boldsymbol{H_A}$.
2. Festlegen des Signifikanzniveaus $\boldsymbol{\alpha}$.
3. Festlegen des Stichprobenumfangs $\boldsymbol{n}$.
4. Berechnen des Ablehnungsbereichs (kritische Werte).
5. Erheben der Daten.
6. Berechnen der Teststatistik (Prüfgröße).
7. Entscheiden (**Ablehnen** oder **Nicht-Ablehnen** von H_0).
8. Interpretieren des Ergebnisses.



Zweiseitiger Z-Test auf Mittelwert (σ bekannt)

Zweiseitiger Test auf Mittelwert (σ bekannt)

- Voraussetzungen:
  - Grundgesamtheit normalverteilt, oder
  - näherungsweise normalverteilt falls $n \geq 30$.
- Null-Hypothese $H_0\colon \mu = \mu_0$.
- Alternativ-Hypothese $H_A\colon \mu \neq \mu_0$.
- Die Teststatistik ist standard-normalverteilt:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

Eine Packung Cornflakes enthält laut Verpackung durchschnittlich 368 g. Bei 25 zufällig ausgewählten Packungen wird eine Durchschnittsmenge von $\bar{x} = 372.5$ g festgestellt.

Stimmt die Angabe auf der Verpackung? Die Abfüllmaschine arbeitet mit einer Präzision von $\sigma = 15$ g. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.

Zweiseitiger Test auf Mittelwert // Lösung

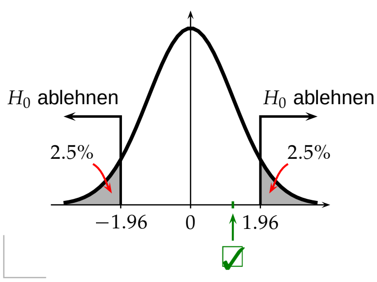
H_0: $\mu = 368$

H_A: $\mu \neq 368$

$\alpha = 0.05$

$n = 25$

Kritische Werte: ± 1.96



Teststatistik:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{372.5 - 368}{15/\sqrt{25}} = 1.5$$

Entscheidung:

H_0 wird nicht abgelehnt.

Interpretation:

Es gibt keine signifikante Abweichung von der Verpackungsangabe.

Zweiseitiger Test auf Mittelwert // Beispiel

Für einen Kunden müssen Schrauben mit einem (mittleren) Durchmesser von 3.2 mm hergestellt werden. Bei einer Kontrollmessung an 10 Schrauben wurde aber ein durchschnittlicher Durchmesser von $\bar{x} = 3.1$ mm gemessen. Laut Herstellerangabe arbeitet die Produktionsmaschine mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0.15$ mm.

Hat der Werkmeister die Maschine falsch eingestellt? Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.

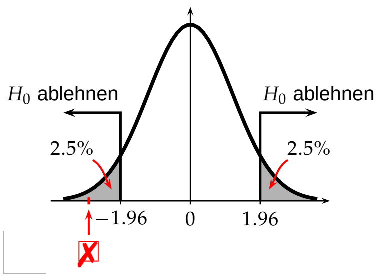
H_0: $\mu = 3.2$

H_A: $\mu \neq 3.2$

$\alpha = 0.05$

$n = 10$

Kritische Werte: ± 1.96



Teststatistik:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{3.1-3.2}{0.15/\sqrt{10}}$$
$$\approx -2.108$$

Entscheidung:

H_0 wird abgelehnt.

Interpretation:

Es gibt eine signifikante Abweichung von der Vorgabe. Der Werkmeister war schlampig.

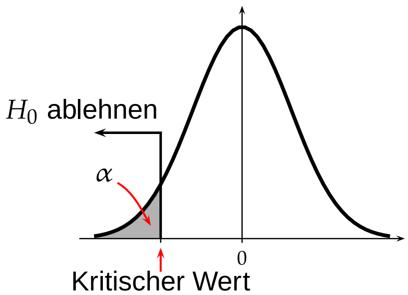
Einseitiger Z-Test auf Mittelwert (σ bekannt)

Einseitiger Test auf Mittelwert (σ bekannt)

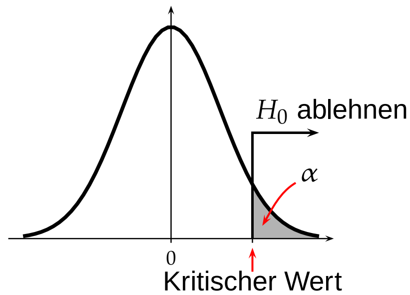
- Voraussetzungen:
  - Grundgesamtheit normalverteilt, oder
  - näherungsweise normalverteilt falls $n \geq 30$.
- Null-Hypothese H_0: $\mu = \mu_0$.
- Alternativ-Hypothese H_A: $\mu < \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$.
- Die Teststatistik ist standard-normalverteilt:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

$H_0: \mu = 0, \quad H_A: \mu < 0$



$H_0: \mu = 0, \quad H_A: \mu > 0$



Einseitiger Test auf Mittelwert // Beispiel

Eine Packung Cornflakes soll durchschnittlich 368 g enthalten. Ein Händler überprüft 25 zufällig ausgewählten Packungen und stellt eine Durchschnittsgewicht von $\bar{x} = 372.5$ g fest.

Soll der Händler den Lieferanten wechseln? Laut Vertrag ist eine Standardabweichung von $\sigma = 15$ g vereinbart. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.

Einseitiger Test auf Mittelwert // Lösung

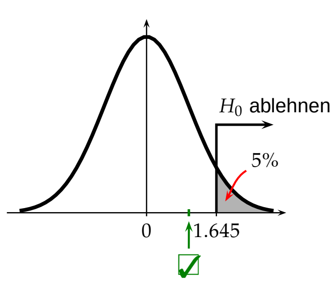
$H_0: \mu = 368$

$H_A: \mu > 368$

$\alpha = 0.05$

$n = 25$

Kritischer Wert: 1.645



Teststatistik:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{372.5 - 368}{15/\sqrt{25}} = 1.5$$

Entscheidung:

H_0 wird nicht abgelehnt.

Interpretation:

Es gibt keine signifikante Abweichung. Der Lieferantenwechsel ist nicht erforderlich.

Bei einem neuen Automodell wurde bei 50 getesteten Fahrzeugen ein durchschnittlicher Benzinverbrauch von $\bar{x} = 6.7$ l/100 km ermittelt. Vergleichbare Fahrzeuge haben eine Benzinverbrauch von 6.8 l/100 km. Es ist außerdem bekannt, dass die Standardabweichung 0.52 l/100 km beträgt.

Kann man bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1\%$ schließen, dass das neue Modell durchschnittlich weniger Benzin verbraucht?

Einseitiger Test auf Mittelwert // Lösung

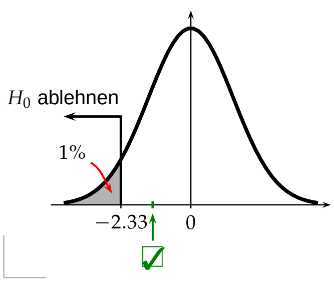
H_0: $\mu = 6.8$

H_A: $\mu < 6.8$

$\alpha = 0.01$

$n = 50$

Kritischer Wert: -2.33



Teststatistik:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{6.7-6.8}{0.52/\sqrt{50}} \approx -1.36$$

Entscheidung:

H_0 wird nicht abgelehnt.

Interpretation:

Das Modell verbraucht nicht signifikant weniger Benzin.

Beobachtetes Signifikanzniveau: Der p-Wert.

Eine andere Sichtweise

- Dient zur Entscheidung, ob abgelehnt werden soll.
  - H_0 wird abgelehnt, falls p-Wert $< \alpha$.
  - H_0 wird nicht abgelehnt, falls p-Wert $\geq \alpha$.
- Beobachtetes Signifikanzniveau.
  - Kleinster Wert für α, für den H_0 abgelehnt werden muss.
- Ist die Wahrscheinlichkeit eine Teststatistik zu erhalten, die zumindest so extrem ($\leq$, $\geq$) ist wie die beobachtete Teststatistik, unter der Voraussetzung, dass H_0 zutrifft.

Zweiseitiger Test auf Mittelwert // p-Wert

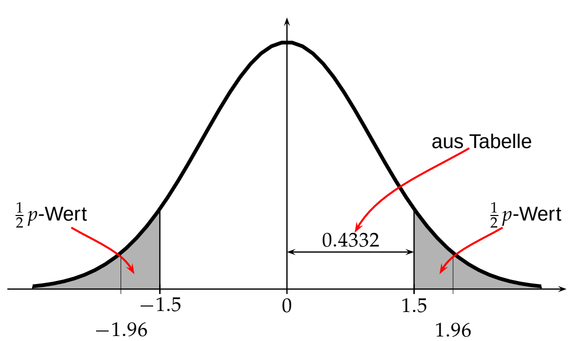
Eine Packung Cornflakes enthält laut Verpackung durchschnittlich 368 g. Bei 25 zufällig ausgewählten Packungen wird eine Durchschnittsmenge von $\bar{x} = 372.5$ g festgestellt. Die Abfüllmaschine arbeitet mit einer Präzision von $\sigma = 15$ g.

Wie lautet der p-Wert?

Zweiseitiger Test auf Mittelwert // p-Wert

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{372.5-368}{15/\sqrt{25}} = 1.5$ (Krit. Werte bei $\alpha = 0.05 : \pm 1.96$)

p-Wert $= P(Z \leq -1.5$ oder $Z \geq 1.5) = 2 \times (0.5 - 0.4332) = \mathbf{0.1336}$



p-Wert $> \alpha = 0.05$, H_0 wird nicht abgelehnt.

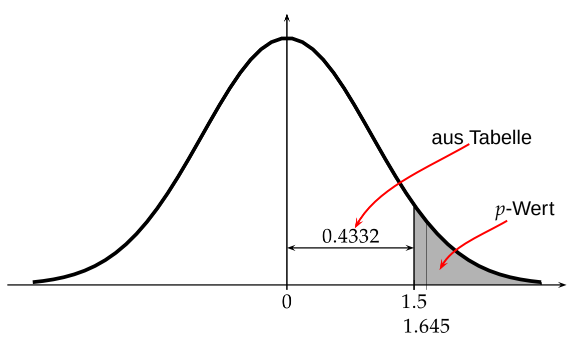
Eine Packung Cornflakes soll durchschnittlich 368 g enthalten. Bei 25 zufällig ausgewählten Packungen wird eine Durchschnittsmenge von $\bar{x} = 372.5$ g festgestellt.

Ist die tatsächliche Durchschnittsmenge größer als vorgesehen? Die Abfüllmaschine arbeitet laut Hersteller mit einer Präzision von $\sigma = 15$ g. Wie lautet der p-Wert?

Einseitiger Test auf Mittelwert // p-Wert

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{372.5-368}{15/\sqrt{25}} = 1.5$ (Krit. Wert bei $\alpha = 0.05 : 1.645$)

p-Wert $= P(Z \geq 1.5) = 0.5 - 0.4332 = \mathbf{0.0668}$



p-Wert $> \alpha = 0.05$. H_0 wird nicht abgelehnt.

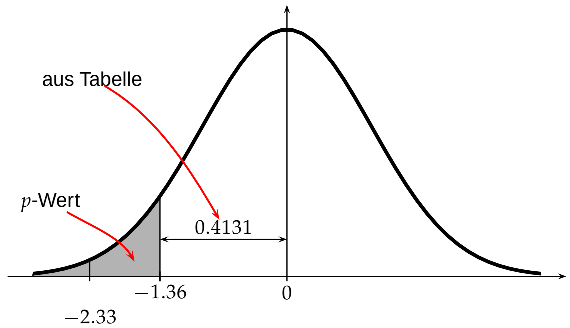
Einseitiger Test auf Mittelwert // p-Wert

Bei einem neuen Automodell wurde bei 50 getesteten Fahrzeugen ein durchschnittlicher Benzinverbrauch von $\bar{x} = 6.7$ l/100 km ermittelt. Vergleichbare Fahrzeuge haben eine Benzinverbrauch von 6.8 l/100 km. Es ist außerdem bekannt, dass die Standardabweichung 0.52 l/100 km beträgt.

Wie groß ist das beobachtete Signifikanzniveau für die Behauptung, dass das neue Modell durchschnittlich gleich viel Benzin verbraucht?

$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{6.7-6.8}{0.52/\sqrt{50}} \approx -1.36$ (Krit. Wert bei $\alpha = 0.01 : -2.33$)

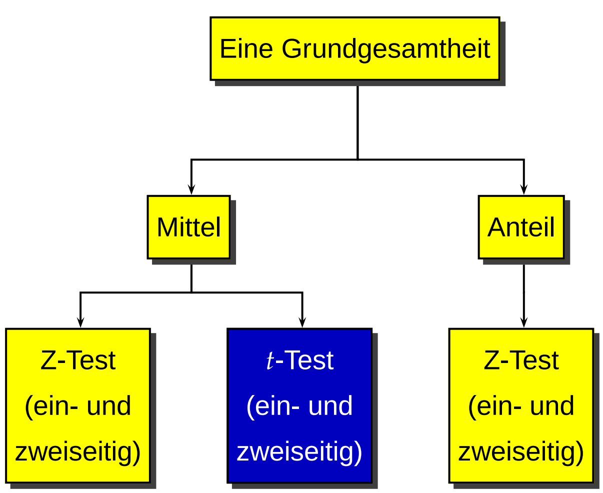
p-Wert $= P(Z \leq -1.36) = 0.5 - 0.4131 = \mathbf{0.0869}$



p-Wert $> \alpha = 0.05$. H_0 wird nicht abgelehnt.

Zweiseitiger t-Test auf Mittelwert (σ unbekannt)

Einstichprobentests



- Voraussetzungen:
  - Grundgesamtheit normalverteilt, oder
  - näherungsweise normalverteilt falls $n \geq 30$.
- Null-Hypothese $H_0\colon \mu = \mu_0$.
- Alternativ-Hypothese $H_A\colon \mu \neq \mu_0$.
- Die Teststatistik ist t-verteilt mit $(n-1)$-Freiheitsgraden:

$$\boxed{t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}$$

Zweiseitiger t-Test auf Mittelwert // Beispiel

Eine Packung Cornflakes enthält laut Verpackung durchschnittlich 368 g. Bei 36 zufällig ausgewählten Packungen werden eine Durchschnittsmenge von $\bar{x} = 372.5$ g und eine Standardabweichung von $s = 12$ g festgestellt.

Der Hersteller will überprüfen, ob korrekt abgefüllt wird. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.

Zweiseitiger t-Test auf Mittelwert // Lösung

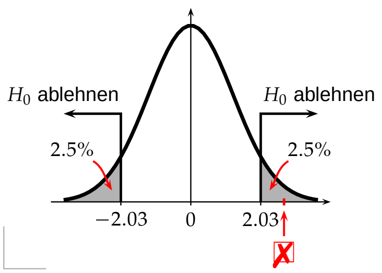
$H_0\colon \mu = 368$

$H_A\colon \mu \neq 368$

$\alpha = 0.05,\ 1 - \alpha/2 = 0.975.$

$n = 36, \quad \nu = 36 - 1 = 35$

Krit.W.: $\pm t_{35,0.975} = \pm 2.0301$



Teststatistik:

$$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{372.5-368}{12/\sqrt{36}} = 2.25$$

Entscheidung:

H_0 wird abgelehnt.

Interpretation:

Es gibt eine signifikante Abweichung von der Verpackungsangabe.

Sie sind Gemüsegroßeinkäufer einer Lebensmittelkette. Sie bekommen eine größere Lieferung an verkaufsfertig abgepackten Äpfeln. Der Lieferant behauptet, die durchschnittliche Füllmenge pro Verkaufseinheit beträgt 3 kg. Bei einer Überprüfung an 20 zufällig ausgewählten Einheiten erhalten Sie aber nur eine Durchschnittsmenge von $\bar{x} = 2.88$ kg bei einer Standardabweichung von $s = 0.3$ kg.

Hat der Lieferant recht? (Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$)

Zweiseitiger *t*-Test auf Mittelwert // Lösung

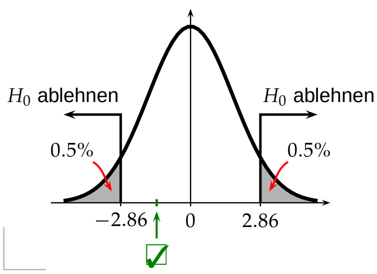
H_0: $\mu = 3$

H_A: $\mu \neq 3$

$\alpha = 0.01$, $1 - \alpha/2 = 0.995$

$n = 20$, $\nu = 20 - 1 = 19$

Krit.W.: $\pm t_{19,0.995} = \pm 2.861$



Teststatistik:

$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{2.88 - 3}{0.3/\sqrt{20}} \approx -1.789$

Entscheidung:

H_0 wird nicht abgelehnt.

Interpretation:

Es gibt keine signifikante Abweichung von der behaupteten Füllmenge.

Einseitiger *t*-Test auf Mittelwert (σ unbekannt)

- Voraussetzungen:
  - Grundgesamtheit normalverteilt, oder
  - näherungsweise normalverteilt falls $n \geq 30$.
- Null-Hypothese $H_0\colon \mu = \mu_0$.
- Alternativ-Hypothese $H_A\colon \mu < \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$.
- Die Teststatistik ist t-verteilt mit $(n-1)$ Freiheitsgarden:

$$\boxed{t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}$$

Einseitiger t-Test auf Mittelwert // Beispiel

Laut Herstellerangaben haben die Batterien einer Marke eine durchschnittliche Kapazität von **mindestens** 140 Ah. Eine Überprüfung von 20 Batterien ergibt aber eine durchschnittliche Kapazität von 138.47 Ah bei einer Standardabweichung von 2.66 Ah.

Stimmt die Herstellerangabe? (Nehmen Sie an, dass die Batteriekapazität normalverteilt ist. Signifikanzniveau 5%)

Einseitiger t-Test auf Mittelwert // Lösung

$H_0\colon \mu = 140$

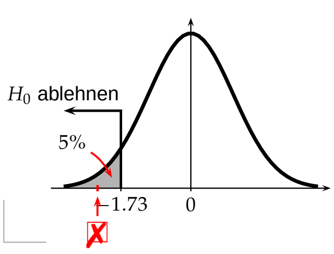
$H_A\colon \mu < 140$

$\alpha = 0.05$

$n = 20, \quad \nu = 20 - 1 = 19$

Kritischer Wert:

$t_{19,0.05} = -t_{19,0.95} = -1.7291$



Teststatistik:

$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{138.47-140}{2.66/\sqrt{20}}$

≈ -2.57

Entscheidung:

H_0 wird abgelehnt.

Interpretation:

Es gibt eine signifikante Abweichung von der Herstellerangabe.

Sie sind Marketingmanager einer Handelskette. Vor Einführung einer neuen Werbekampagne war der durchschnittliche tägliche Umsatz in allen Filialen 5000 €. Nach der Werbekampagne behauptet die Werbeagentur, dass der Umsatz gestiegen ist. Eine stichprobenartige Überprüfung in 10 Filialen ergibt folgendes Bild (in 1000 €): 6, 5, 7, 8, 5, 4, 4, 3, 4, 5.

Hat die Agentur recht? (Signifikanzniveau 5%)

Einseitiger t-Test auf Mittelwert // Lösung

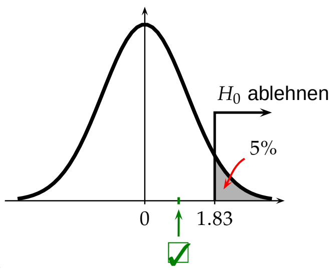
$H_0: \mu = 5$

$H_A: \mu > 5$

$\alpha = 0.05$

$n = 10, \quad \nu = 10 - 1 = 9$

Krit.W.: $t_{9,0.95} = 1.8331$



Teststatistik:

$t = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{5.1-5}{1.524/\sqrt{10}}$
≈ 0.2075

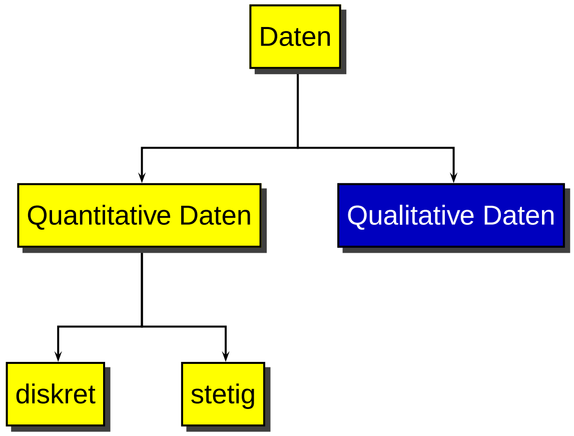
Entscheidung:

H_0 wird nicht abgelehnt.

Interpretation:

Es gibt keine signifikante Steigerung des Umsatzes.

Test auf den Anteil



Qualitative Daten

- Qualitative Zufallsvariable haben Ausprägungen, die klassifizieren (kategorisieren).
  - Z.B.: Geschlecht (♀, ♂)
- Zeigen die Häufigkeiten in jeder Kategorie.
- Nominal- oder Ordinalskala.
- Beispiele:
  - Wohnen Sie in Wien?
  - Besitzen Sie ein Handy?

Anteilswert

- Bezieht sich auf qualitative Daten.
- Anteil (relativ oder in %) der Grundgesamtheit in einer Kategorie. Bezeichnung in der Grundgesamtheit: θ.
- Bei Merkmalen mit 2 Ausprägungen ist die Anzahl der Erfolge unter n Ziehungen (mit Zurücklegen) binomialverteilt. (2 Möglichkeiten: Hat Eigenschaft oder hat sie nicht. Dichotomes Merkmal. n Wiederholungen.)
- Anteilswert in einer Stichprobe, $p = \hat{\theta}$. ($p \neq p$-**Wert!**)

$$\boxed{p = \frac{x}{n} = \frac{\text{Anzahl mit Eigenschaft}}{\text{Stichprobenumfang}}}$$

- X, die Anzahl der Erfolge in einer Stichprobe vom Umfang n ist binomialverteilt. Wir approximieren diese Verteilung durch die Normalverteilung, wenn die Faustregel gilt:

$$\boxed{n\,p\,(1-p) \geq 9}$$

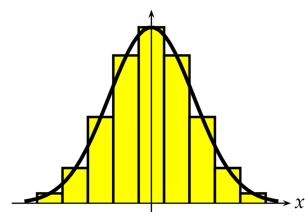
- Mittel für den Anteilswert

$$\mu_p = \theta$$

- Standardabweichung

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\theta\,(1-\theta)}{n}}$$

Stichprobenverteilung für X_n

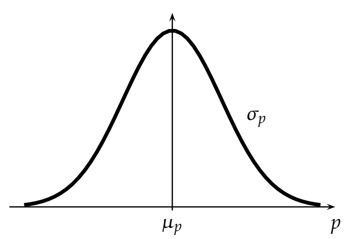


Stichprobenverteilung des Anteilswertes

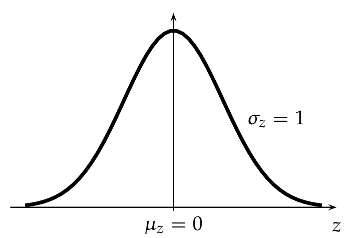
Standardisierung:

$$\boxed{Z = \frac{P-\mu_p}{\sigma_p} = \frac{P-\theta}{\sqrt{\frac{\theta\,(1-\theta)}{n}}}}$$

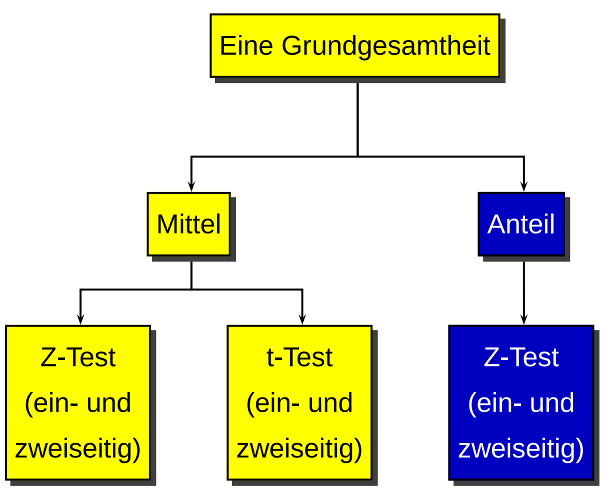
Stichprobenverteilung für P



Standardisierte Stichprobenverteilung



Einstichprobentests



- Voraussetzungen:
  - Dichotome Merkmale (2 mögliche Ausprägungen)
  - Anzahl Erfolge unter n Versuchen binomialverteilt
  - Approximation durch Normalverteilung: $n\,p\,(1-p) \geq 9$
- Die Teststatistik ist standard-normalverteilt:

$$\boxed{Z = \frac{P - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{P - \theta}{\sqrt{\frac{\theta\,(1-\theta)}{n}}}}$$

($\theta \ldots$ Anteil in der Grundgesamtheit unter der H_0)

Test auf Anteilswert // Beispiel

Eine Maschine zur Erzeugung von Glühlampen produziert 10% Ausschuss. Eine neue Maschine soll angeschafft werden, die laut Herstellerangaben zuverlässiger arbeiten soll. Bei einem Probelauf werden 200 Lampen zufällig entnommen. Davon waren 11 defekt.

Produziert die neue Maschine weniger Ausschuss? Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 5%.

Test auf Anteilswert // Lösung

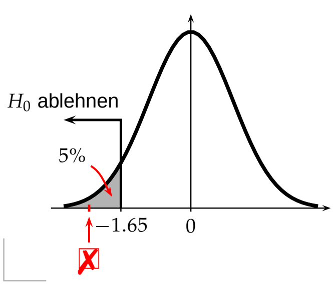
$H_0\!: \theta = 0.1$

$H_A\!: \theta < 0.1$

$\alpha = 0.05$

$n = 200$

Kritischer Wert: -1.645



Teststatistik:

$$Z = \frac{p-\theta}{\sqrt{\frac{\theta\,(1-\theta)}{n}}} = \frac{\frac{11}{200} - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1\,(1-0.1)}{200}}} \approx -2.12$$

Entscheidung:

H_0 wird abgelehnt.

Interpretation:

Die neue Maschine produziert signifikant weniger Ausschuss.

Eine politische Partei hat bei den letzten Parlamentswahlen 30% der Wählerstimmen erhalten. Bei einer Meinungsumfrage nach einem Jahr geben 48 von 150 Befragten an, sie würden jetzt diese Partei wählen.

Hat sich die Zustimmung zu dieser Partei seit der Wahl geändert? (Signifikanzniveau 5%)

Test auf Anteilswert // Lösung

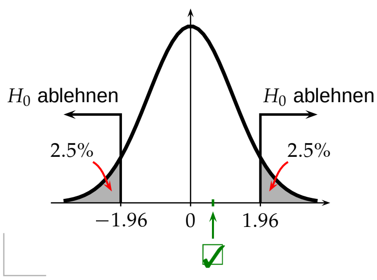
$H_0: \theta = 0.3$

$H_A: \theta \neq 0.3$

$\alpha = 0.05,\ 1 - \alpha/2 = 0.975$

$n = 150$

Kritischer Wert: ± 1.96



Teststatistik:

$$Z = \frac{p-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} = \frac{\frac{48}{150} - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3\,(1-0.3)}{150}}} \approx 0.53$$

Entscheidung:

H_0 wird nicht abgelehnt.

Interpretation:

Die Zustimmung zur Partei hat sich nicht signifikant verändert.

Macht eines Tests

- Wahrscheinlichkeit, dass die **falsche** Null-Hypothese auch abgelehnt wird.
- Wird mit $(1 - \beta)$ bezeichnet. $[1 - (\beta$-Fehler$)]$
- Überprüft die Trennschärfe des Tests: Wie gut zwischen H_0 und Alternative H_A unterschieden werden kann.
- Wird beeinflusst durch
  - wahren Wert des Parameters in der Grundgesamtheit.
  - Signifikanzniveau α.
  - Standardabweichung der Stichprobe.
  - Stichprobenumfang n.

Hypothese:

$H_0 \colon \mu_0 = 368$

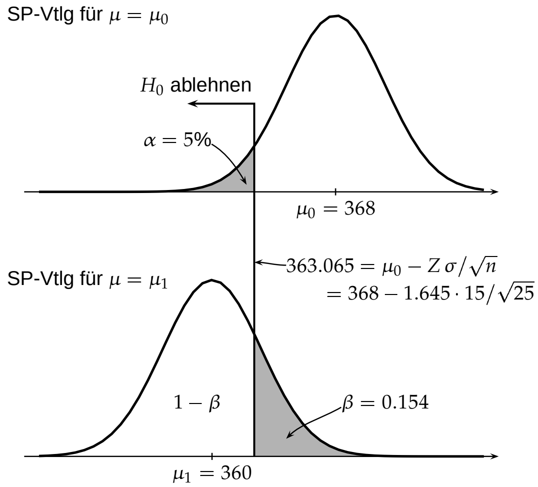
$H_A \colon \mu_0 < 368$

$\alpha = 0.05$

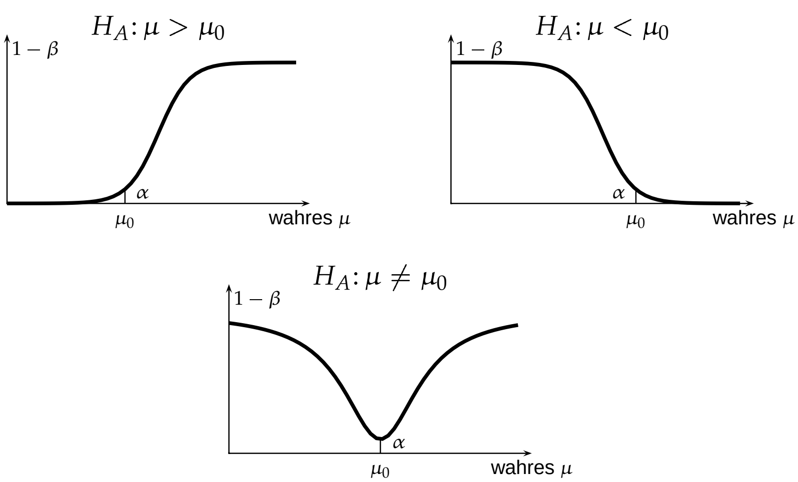
Krit. Wert: -1.645

„Tatsächlich“

$\mu_1 = 360$



Macht eines Tests // Verlauf der Gütefunktion



Zusammenfassung

1. Beschrieben Test und Hypothese.
2. Unterschieden Arten von Hypothesen.
3. Beschrieben das Testen von Hypothesen.
4. Erklärten Ablehnungsbereich und p-Wert.
5. Lösten das Testproblem für einen Parameter.
6. Definierten Fehler 1. und 2. Art.
7. Erklärten die Macht eines Tests.