Statistik – Einführung

Konfidenzintervalle für einen Parameter
Kapitel 7

Statistik – WU Wien

Gerhard Derflinger · Michael Hauser · Jörg Lenneis · Josef Leydold ·
Günter Tirler · Rosmarie Wakolbinger

Lernziele

1. Formulieren, was geschätzt wird.
2. Unterscheiden Punktschätzer und Intervallschätzer.
3. Erklären Intervallschätzer.
4. Berechnen Konfidenzintervalle für Mittelwerte und Anteile.
5. Berechnen notwendige Stichprobengröße.

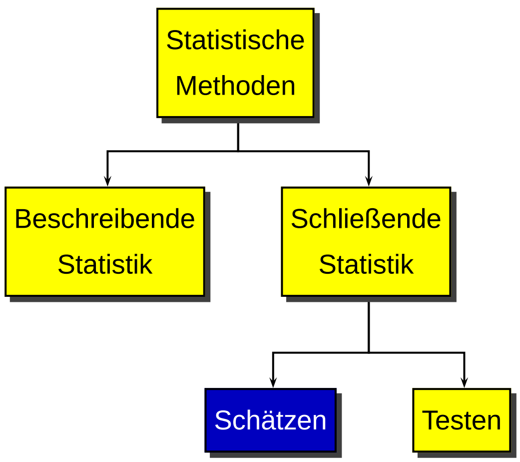
Was sind und wozu braucht man Schätzer?

Wir sind interessiert an der durchschnittlichen Körpergröße aller Studentinnen und Studenten im Hörsaal (der **Grundgesamtheit**). Wie können wir sie bestimmen?

- **Vollerhebung**
  Messen Körpergröße aller Anwesenden.
  (zeitaufwendig und teuer; in vielen Problemen unmöglich)

- **Teilerhebung**
  Messen Körpergrösse einer kleinen **zufälligen** Auswahl von Anwesenden (**Stichprobe**).
  (Schätzwert mit Unsicherheit – aber berechenbar)

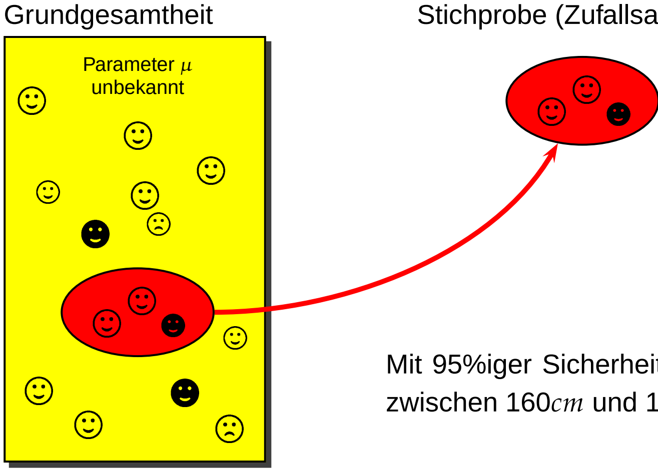
Statistische Methoden



Schätzen eines Parameters

Grundgesamtheit

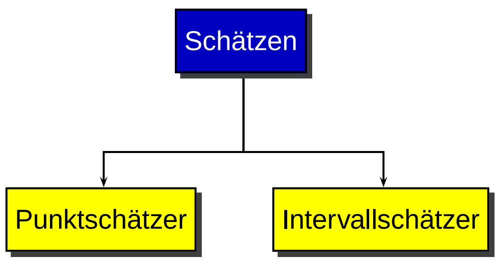
Stichprobe (Zufallsauswahl)



Mit 95%iger Sicherheit liegt μ zwischen 160cm und 190cm.

Parameter		Stichprobenstatistik
Mittel	μ	$\bar{x}$
Anteil	θ	p
Differenz	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
	$\theta_1 - \theta_2$	$p_1 - p_2$
viele andere		

Schätzmethoden



Punktschätzer

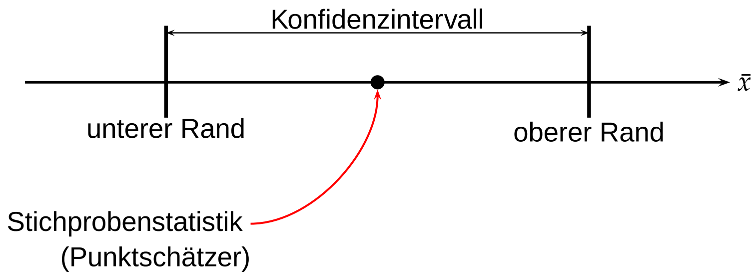
- Liefert eine **einzelne** Zahl.
  - Basierend auf **einer** Stichprobe.
- Keine Information über die Abweichung vom unbekannten Parameter.
- Beispiel: Der bekannte Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 175$ ist ein Punktschätzer für den unbekannten Parameter μ.

Intervallschätzer

Intervallschätzer

- Liefert ein **Intervall** für den unbekannten Parameter.
  - Basierend auf **einer** Stichprobe.
- Gibt Information über die Abweichung vom unbekannten Parameter.
  - Ausgedrückt durch Wahrscheinlichkeiten.
  - Exakte Angaben würde Kenntnis des (unbekannten) Parameters erfordern.
- Beispiel: Der unbekannte Mittelwert liegt zwischen 160cm und 190cm mit einer Sicherheit von 95%.

Parameter fällt mit bekannter Wahrscheinlichkeit in das Intervall.



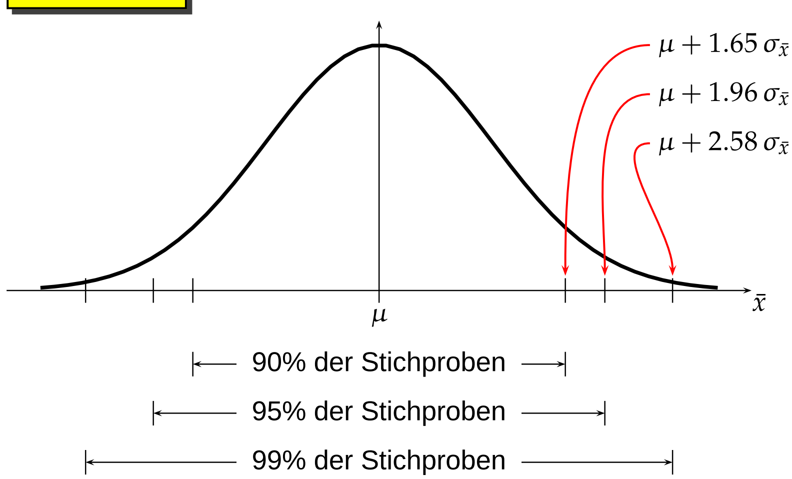
Konfidenzintervall

Parameter = Statistik $\pm$ Fehler

1. $\mu = \bar{X} \pm$ Fehler
2. Fehler $= \bar{X} - \mu$ oder $\bar{X} + \mu$
3. $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{\text{Fehler}}{\sigma_{\bar{x}}}$ (standard-normalverteilt)
4. Fehler $= Z\,\sigma_{\bar{x}}$
5. $\mu = \bar{X} \pm Z\,\sigma_{\bar{x}}$

Stichprobenverteilung des Mittels

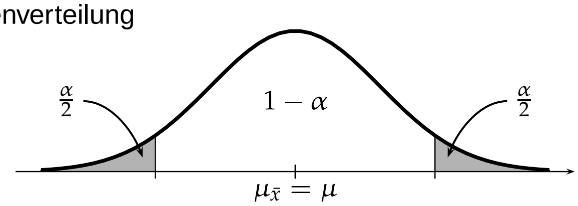
$\bar{X} = \mu \pm Z\,\sigma_{\bar{x}}$



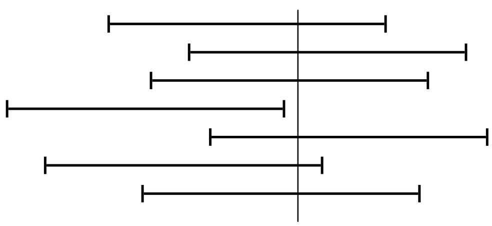
- Das **Konfidenzniveau** ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Intervall den unbekannten Parameter überdeckt.
- Wird mit $(1-\alpha)\%$ bezeichnet.
  - α ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Intervall nicht den Parameter überdeckt.
- Typische Werte für $(1-\alpha)\%$ sind: 90%, 95% und 99%.

Intervalle und Konfidenzniveau

Stichprobenverteilung



Konstruiere $[\bar{X} - z\,\sigma_{\bar{x}}\,,\,\bar{X} + z\,\sigma_{\bar{x}}]$ Davon:



$(1-\alpha)\%$ aller KI überdecken μ.

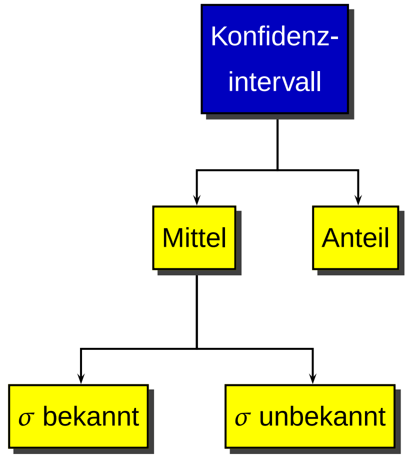
$\alpha\%$ nicht.

Viele Konfidenzintervalle

Konfidenzintervall // Einflüsse auf die Länge

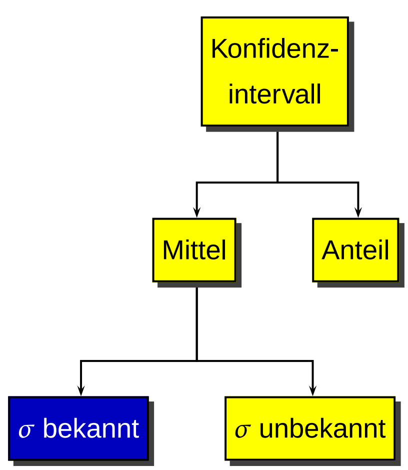
$\boxed{\text{KI} = [\bar{X} - z\,\sigma_{\bar{x}}\,,\,\bar{X} + z\,\sigma_{\bar{x}}]}$

- Streuung der Daten.
  - Gemessen durch die Standardabweichung σ.
- Stichprobengröße n.
  - $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Konfidenzniveau $(1-\alpha)$.
  - Bestimmt z.



Konfidenzintervall für Mittel (σ bekannt)

Konfidenzintervall // Berechnung



- **Voraussetzungen:**
  - Grundgesamtheit ist **normalverteilt**.
  - Falls nicht, können Stichproben mit Größe $n \geq 30$ näherungsweise als normalverteilt angenommen werden. (zentraler Grenzwertsatz)
  - **Standardabweichung** σ in der Grundgesamtheit ist **bekannt**.
- **Berechnung des $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalls:**
  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

$$\boxed{\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Beispiel

Das Mittel einer Stichprobe der Größe $n = 25$ ist $\bar{x} = 50$. Wie lautet das 95% Konfidenzintervall für μ, falls die Standardabweichung der normalverteilten Grundgesamtheit $\sigma = 10$ beträgt?

$$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

z hängt von Normalverteilung und vom Konfidenzniveau ab:

$1-\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$, $1-\alpha/2 = 0.975$: $z_{0.975} = 1.96$.

$$50 - 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 50 + 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$46.08 \leq \mu \leq 53.92$$

Beispiel

Die Standardabweichung beim Befüllen von 2-Liter-Weinflaschen beträgt $\sigma = 0.05$ Liter. Bei einer Kontrolle der Abfüllmaschine werden 100 Flaschen zufällig ausgewählt und die abgefüllte Weinmenge bestimmt. Der dabei bestimmte Stichprobenmittelwert beträgt $\bar{x} = 1.99$ Liter. Was ist das 90% Konfindenzintervall für die tatsächliche mittlere Füllmenge?

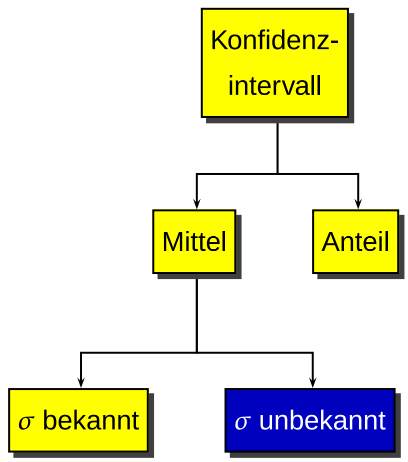
$$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$1.99 - 1.645 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 1.99 + 1.645 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{100}}$$

$$1.982 \leq \mu \leq 1.998$$

Konfidenzintervall für Mittel
(σ unbekannt)

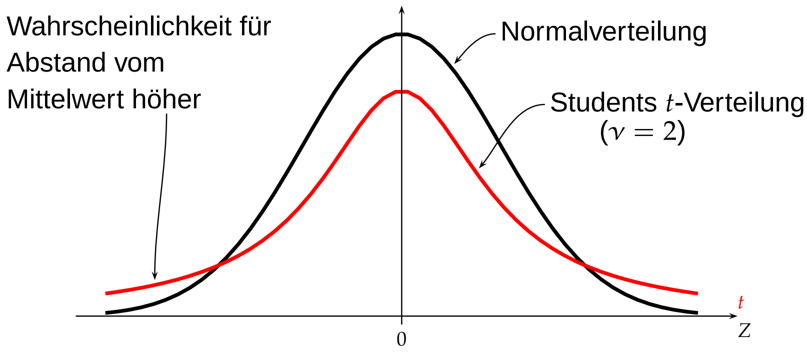
Konfidenzintervall // Berechnung



KI für Mittel (σ unbekannt)

- **Voraussetzung:**
  - Grundgesamtheit (näherungsweise) **normalverteilt**.
- **Standardabweichung** der Grundgesamtheit **unbekannt**.
  - Standardabweichung σ muss durch Stichprobenstandardabweichung S **geschätzt** werden.
  - Unsicherheit S größer $\rightarrow$ größeres Konfidenzintervall
  - Verwenden ***t*-Verteilung** (Student-Verteilung).
- **Berechnung des $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalls:**

$$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$



Form hängt von den “Freiheitsgraden” ν ab.

Freiheitsgrade

Die Anzahl der Beobachtungen, die variiert werden können, ohne dass sich die Stichprobenstatistik ändert.

$\boxed{\text{Anzahl Freiheitsgrade } \nu = n - 1}$

Die Summe von 3 Zahlen ist 6 (=Stichprobenstatistik).

X_1	= 1	(oder irgend eine andere Zahl)
X_2	= 2	(oder irgend eine andere Zahl)
X_3	= 3	(kann nicht verändert werden)
Summe	= 6	

Anzahl Freiheitsgrade = $3 - 1$ = 2

Students t-Verteilung // Tabelle

t-Verteilung – Tabelle(Auszug):

$$P(-\infty \leq T \leq t)$$

	$1-\alpha$		
ν	0.90	0.95	0.975
1	3.078	6.314	12.705
2	1.886	2.920	4.303
3	1.638	2.353	3.182
...	...	...	...

t-Werte

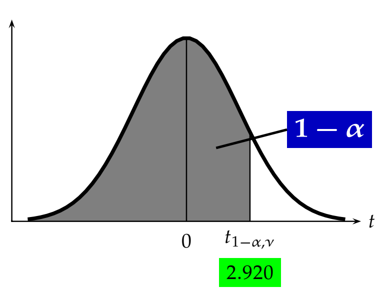
Beispiel:

$n = 3, \quad \nu = n - 1 = 2$

$\alpha = 0.05, \quad 1 - \alpha = 0.95$

$t_{1-\alpha,\nu} = t_{0.95,2} = 2.920$

$t_{\alpha,\nu} = -t_{1-\alpha,\nu} = -2.920$



Das Mittel einer Stichprobe der Größe $n = 25$ ist $\bar{x} = 50$ mit (Stichproben-) Standardabweichung $s = 8$.
Wie lautet das 95% Konfidenzintervall für μ? ($\nu = n - 1 = 24$)

$$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$50 - 2.064 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 50 + 2.064 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}}$$

$$46.69 \leq \mu \leq 53.30$$

Beispiel

Bei Kontrollen eines computergesteuerten Nähautomaten wurden folgenden Bearbeitungszeiten (in Minuten) gemessen:

3.6, 4.2, 4.0, 3.5, 3.8, 3.1

Wie lautet das 90% Konfindenzintervall für die durchschnittliche Bearbeitungszeit?

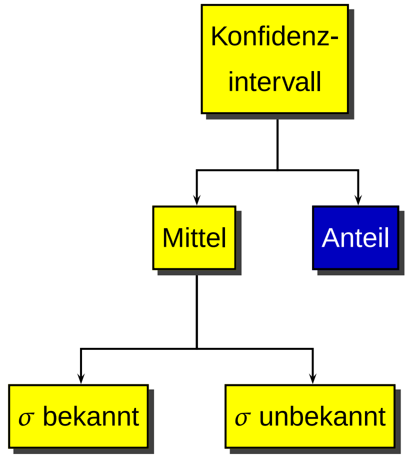
$$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = (3.6 + 4.2 + 4.0 + 3.5 + 3.8 + 3.1)/6 = 3.7$$
$$s^2 = \left((3.6 - 3.7)^2 + (4.2 - 3.7)^2 + \ldots + (3.1 - 3.7)^2\right)/5 = 0.152$$
$$n = 6, \quad s/\sqrt{n} = 0.159, \quad \nu = n - 1 = 5, \quad t_{0.95,5} = 2.015$$

$$3.7 - 2.015 \cdot 0.159 \leq \mu \leq 3.7 + 2.015 \cdot 0.159$$

$$3.380 \leq \mu \leq 4.020$$

Konfidenzintervall für Anteilswerte



Konfidenzintervall für Anteilswerte

- **Voraussetzung:**
  - Zwei mögliche Ausprägungen:
    hat Eigenschaft / hat Eigenschaft nicht
  - Grundgesamtheit ist binomialverteilt.
- Der Anteilswert p ist in einer **großen** Stichprobe näherungsweise normalverteilt. (Faustregel: $n\,p\,(1-p) \geq 9$)
- **Berechung des Konfidenzintervalls:**

$$\boxed{p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \leq \theta \leq p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}}$$

Beispiel

Bei einer Umfrage geben von 32 von 400 Befragten an, das neue Waschmittel “Gigaweiß” bereits zu kennen.
Wie lautet das 95 % Konfidenzintervall für den Anteil θ in der Grundgesamtheit?

$$p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \leq \theta \leq p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$$

$$n = 400, \quad p = 32/400, \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$$

$$0.08 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.08\,(1-0.08)}{400}} \leq \theta \leq 0.08 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.08\,(1-0.08)}{400}}$$

$$0.053 \leq \theta \leq 0.107$$

Bestimmung der Stichprobengröße

Notwendige Stichprobengröße

Wie groß muss die Stichprobe sein, damit mein Konfidenzintervall für μ klein genug ist?
Ich möchte aber auch keine zu große Stichprobe haben!
(Das Konfidenzniveau halten wir fest.)

1. $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{\text{Fehler}}{\sigma_{\bar{x}}}$
2. $\text{Fehler} = Z\,\sigma_{\bar{x}} \quad = Z\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
3. $\text{Stichprobengröße } n = \dfrac{Z^2\,\sigma^2}{\text{Fehler}^2} \quad \rightarrow \quad n = \dfrac{z^2_{1-\alpha/2}\,\sigma^2}{\text{Fehler}^2}$

Der Fehler ist hier die maximale zulässige Abweichnung von μ.
Die Länge des KI ist $2 \times$ Fehler.

Beispiel

Ein Parameter μ soll bestimmt werden. Wie groß sollte die Stichprobe sein, damit das Ergebnis mit 90% Sicherheit auf ± 5 Einheiten genau bestimmt werden kann?
(D.h., das 90% Konfindenzintervall sollte, z.B., $[85, 95]$ lauten.)

Eine Vorerhebung lässt darauf schließen, dass die Standardabweichung $\sigma = 45$ beträgt.

$$\text{Stichprobengröße } n = \frac{z^2_{1-\alpha/2}\,\sigma^2}{\text{Fehler}^2} = \frac{1.645^2\,45^2}{5^2} = 219.2 \approx 220$$

1. Formulierten, was geschätzt wird.
2. Unterschieden Punktschätzer und Intervallschätzer.
3. Erklärten Intervallschätzer.
4. Berechneten Konfidenzintervalle für Mittelwerte und Anteile.
5. Berechneten die notwendige Stichprobengröße.