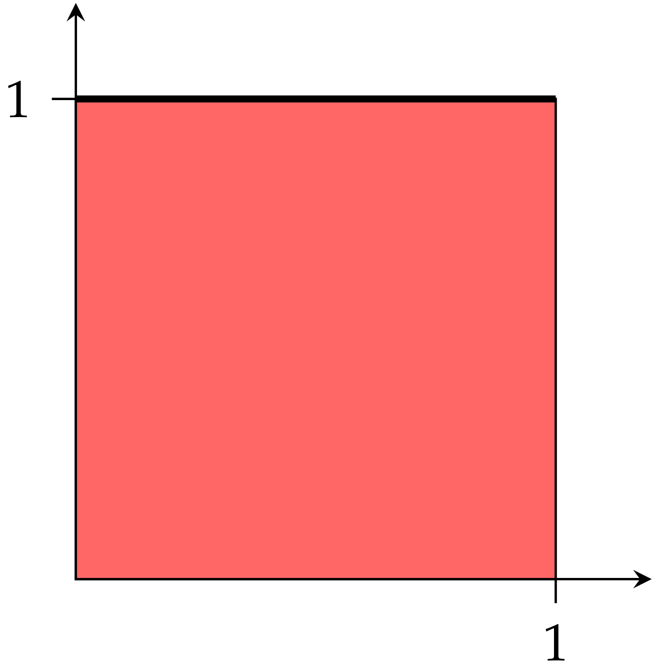
Kapitel 10

Integration

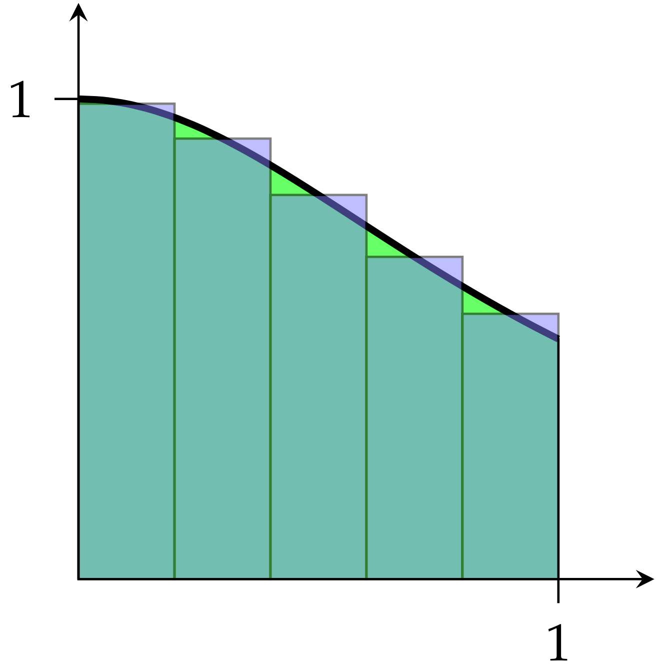
Flächeninhalt

Berechnen Sie die Inhalte der angegebenen Flächen!



$f(x) = 1$

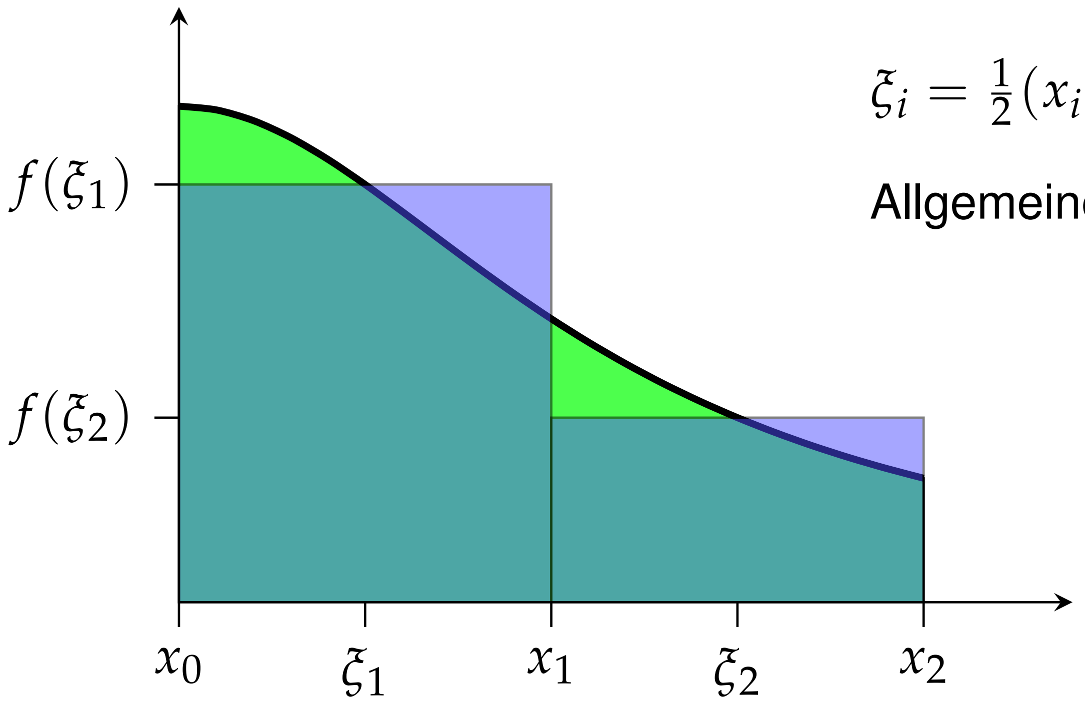
Fläche: $A = 1$



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Approximation
durch Treppenfunktion

Riemann-Summen

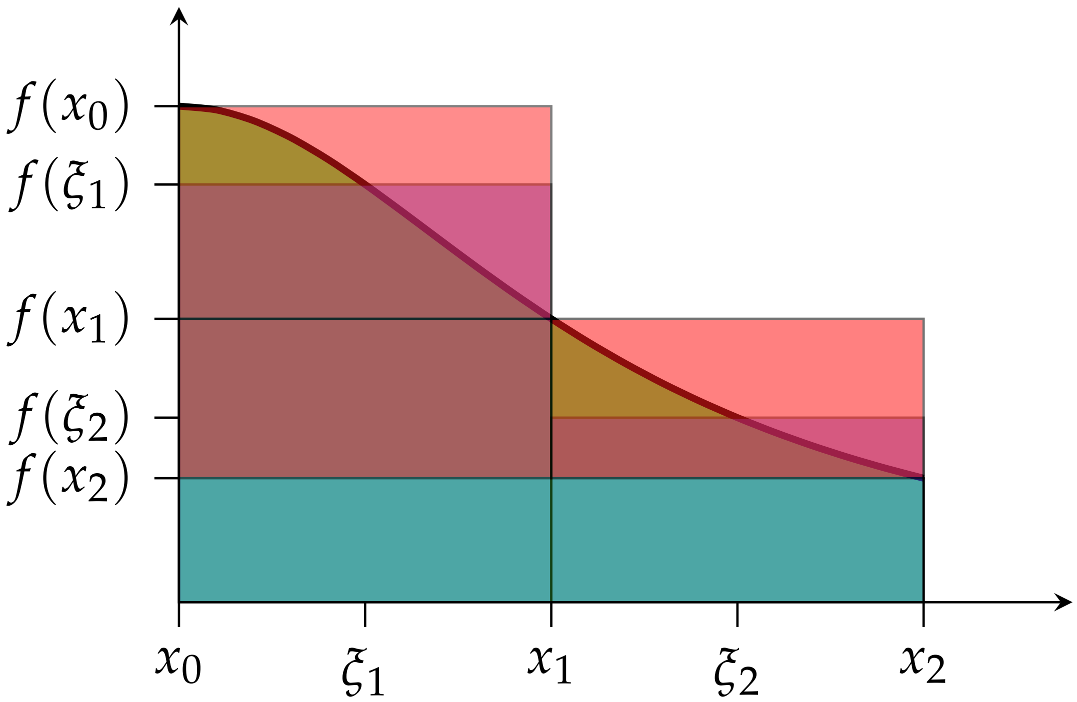


$\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

Allgemeiner: $\xi_i \in (x_i, x_{i-1})$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Approximationsfehler



$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \leq (f_{\max} - f_{\min})\,(b-a)\,\frac{1}{n} \to 0$$

Annahme: Funktion monoton; $x_0, x_1, \ldots, x_n$ äquidistant

Riemann-Integral

Falls die **Riemann-Summen**

$$\boxed{I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

eine konvergente Folge bilden, dann heißt deren Grenzwert das

Riemann-Integral von f. Notation: $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

Alle für uns relevanten Funktionen besitzen ein Riemann-Integral.

Riemann-Integral und Erwartungswert

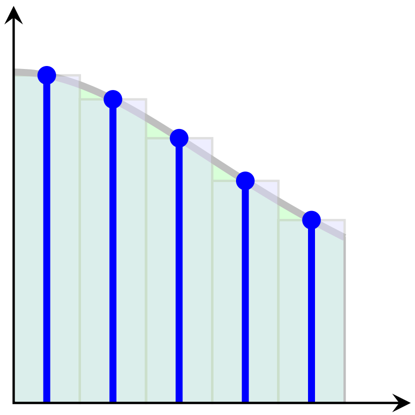
Angenommen eine stetige Zufallsvariable X mit Dichte f kann nur als diskrete Zufallsvariable D mit Wahrscheinlichkeitsfunktion w beobachtet werden. (**Klassifizieren** in n Klassen)

Sei $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ Klassenrepräsentant mit Wahrscheinlichkeit

$$w(\xi_i) = \mathrm{P}(D = \xi_i) = \mathrm{P}(x_{i-1} < X \leq x_i) \approx f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Für den Erwartungswert von D gilt dann

$$\mathrm{E}[D] \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b x \cdot f(x)\, dx = \mathrm{E}[X]$$



Riemann-Integral – Eigenschaften

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a,b]$$

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, falls

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Berechnung:

Vermuten und Verifizieren

Beispiel: Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{Vermuten:} \quad F(x) &= x\,(\ln(x) - 1) \\
\text{Verifizieren:} \quad F'(x) &= (x\,(\ln(x) - 1))' = \\
&= 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \tfrac{1}{x} = \ln(x)
\end{aligned}$$

$$\text{Aber auch:} \quad F(x) = x\,(\ln(x) - 1) + 5$$

Stammfunktion

Die Stammfunktion wird mit dem Symbol

$$\boxed{\int f(x)\,dx + c}$$

bezeichnet und wird meist als das **unbestimmte Integral** der Funktion f bezeichnet. Die Zahl c heißt **Integrationskonstante**.

Für das Suchen von Stammfunktionen gibt es keine *„Kochrezepte“* (sondern nur Werkzeuge, die man durchprobieren kann).

Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen.

E.g., die Stammfunktion von $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

Grundintegrale

Zur Erleichterung gibt es Tabellen mit bekannten Stammfunktionen, sogenannten **Grundintegralen**:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	c
x^a	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Integrationsverfahren

- **Summenregel**

$$\boxed{\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx}$$

- **Partielles Integrieren**

$$\boxed{\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx}$$

- **Substitution**

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz \\ \text{mit } z = g(x) \text{ und } dz = g'(x)\, dx\end{array}}$$

Beispiel – Summenregel

Stammfunktion von $f(x) = 4\,x^3 - x^2 + 3\,x - 5$.

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int 4\,x^3 - x^2 + 3\,x - 5\,dx \\
&= 4\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + 3\int x\,dx - 5\int dx \\
&= 4\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 5x + c \\
&= x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + c
\end{aligned}
$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$.

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} \, dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$\begin{aligned} f &= x &\quad \Rightarrow \quad f' &= 1 \\ g' &= e^x &\quad \Rightarrow \quad g &= e^x \end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cos(x)$.

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx = \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g}\, dx$$

Partielles Integrieren des zweiten Terms ergibt:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}\, dx &= \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g} - \int \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g}\, dx \\ &= -2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot (-\sin(x)) + c\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von f lautet daher:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c$$

Beispiel – Substitution

Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

$$\int \exp(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}\, dx = \int \exp(z)\, dz = e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$z = g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad dz = g'(x)\, dx = 2x\, dx$$

Integrationsverfahren – Herleitung

Partielles Integrieren erhält man aus der Produktregel für das Differenzieren:

$$
\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= \int (f(x) \cdot g(x))' \, dx = \int \big(f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\big) \, dx \\
&= \int f'(x)\, g(x)\, dx + \int f(x)\, g'(x)\, dx
\end{aligned}
$$

Substitution folgt aus der Kettenregel:
Sei F eine Stammfunktion von f und $z = g(x)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int f(z)\, dz = F(z) = F(g(x)) &= \int (F(g(x)))'\, dx \\
&= \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx
\end{aligned}
$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion einer *stetigen* Funktion $f(x)$,
dann gilt für das bestimmte **Integral**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

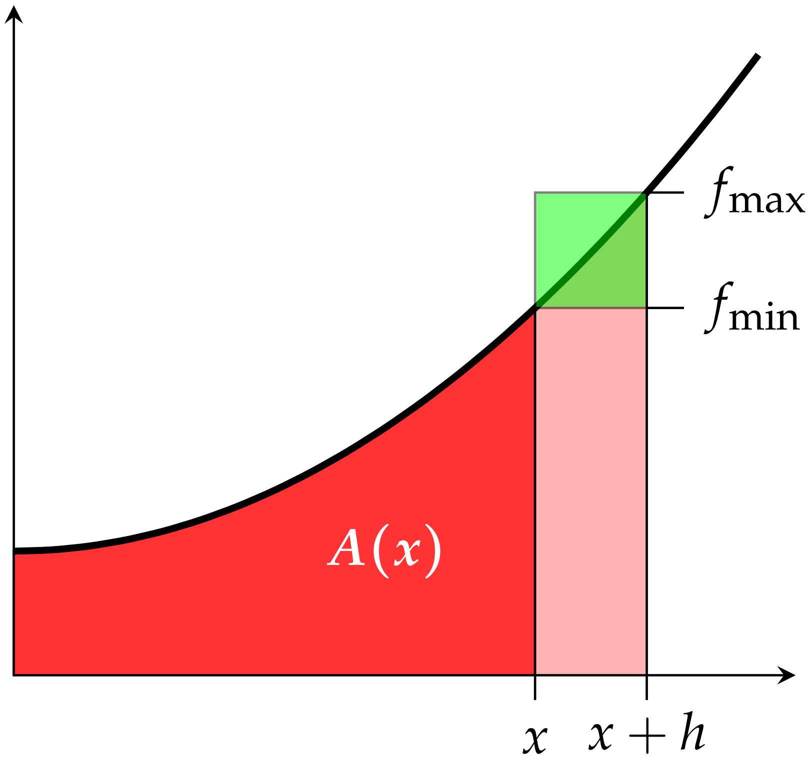
Dieser Satz erlaubt es uns, Integrale einfach mittels Stammfunktionen auszurechnen! (**Bestimmtes Integral**)

Beispiel:
Wir suchen das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0,1]$.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\,x^3\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Der Hauptsatz / Beweisidee

Sei $A(x)$ die Fläche zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion f und der x-Achse zwischen 0 und x.



$$f_{\min} \cdot h \leq A(x+h) - A(x) \leq f_{\max} \cdot h$$

$$f_{\min} \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f_{\max}$$

Grenzübergang $h \to 0$: ($\lim_{h\to 0} f_{\min} = f(x)$)

$$f(x) \leq \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}}_{=A'(x)} \leq f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

d.h. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Integrationsverfahren / (2)

- **Summenregel**

$$\boxed{\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx}$$

- **Partielles Integrieren**

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g'\,dx = f \cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g\,dx}$$

- **Substitution**

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x)\,dx$

Beispiel

Berechne das bestimmte Integral $\displaystyle\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx$.

$$\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx \quad = \quad \int_1^{\ln(10)} \frac{1}{z}\, dz =$$

$$z = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{x}\, dx$$

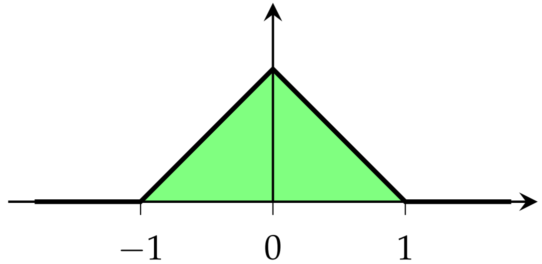
$$= \quad \ln(z)\Big|_1^{\ln(10)} =$$

$$= \quad \ln(\ln(10)) - \ln(1) \approx 0{,}834$$

Beispiel

Gesucht ist $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ und } x \ge 1 \end{cases}$$



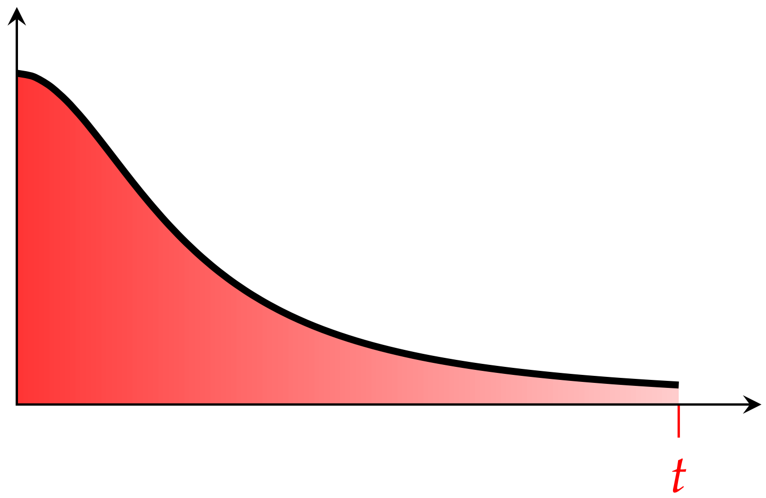
Es gilt

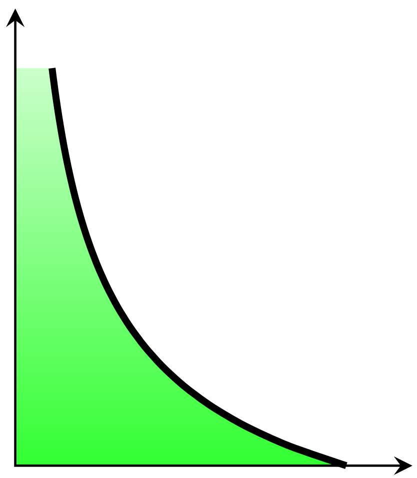
$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} 0\,dx \\ &= (x + \tfrac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{0} + (x - \tfrac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{1} \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Uneigentliches Integral

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen

- das Integrationsintervall unbeschränkt ist, oder
- die Funktion unbeschränkt ist.





$$\boxed{\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 f(x)\,dx}$$

Beispiele

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0}(2-2\sqrt{t}) = 2$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} - (-1) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln(x)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln(t) - \ln(1) = \infty$$

Das uneigentliche Integral existiert somit nicht.

Zwei Limiten

In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird oft über einen Bereich integriert, in dem beide Grenzen unbeschränkt sind. Z.B.:
Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X mit Dichte f ist definiert als

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

In diesem Fall müssen wir die beiden Grenzwerte getrennt auswerten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} x \cdot f(x)\,dx + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} x \cdot f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Achtung!
Tritt dabei als Zwischenresultat $\infty - \infty$ auf,
so ist das Ergebnis **nicht** $\infty - \infty = 0$!

Leibniz Formel

Gegen sei eine *stetig differenzierbare* Funktion $f(x,t)$ und

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$

Dann gilt für die Ableitung

$$\boxed{F'(x) = f(x,b(x))\;b'(x) - f(x,a(x))\;a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt}$$

Falls $a(x) = a$ und $b(x) = b$ konstant sind, dann gilt insbesondere:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt}$$

Beispiel

Sei $F(x) = \int_x^{2x} t\,x^2\,dt$ für $x \geq 0$. Berechne $F'(x)$.

Wir setzen $f(x,t) = t\,x^2$, $a(x) = x$ und $b(x) = 2x$.

Dann gilt auf Grund der Leibniz Formel,

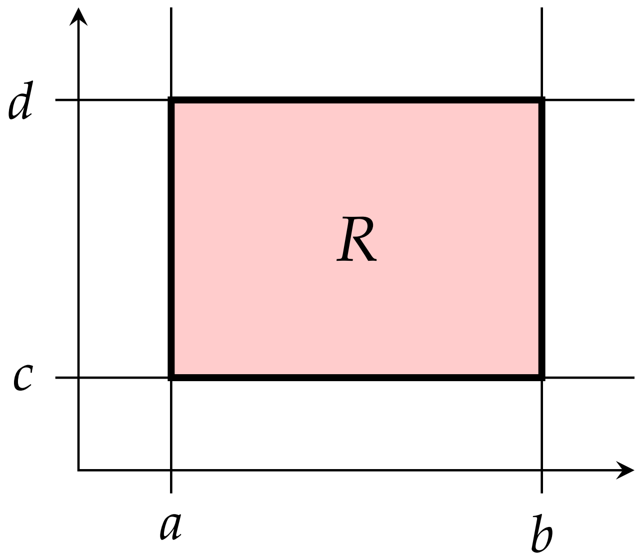
$$\begin{aligned}
F'(x) &= f(x,b)\cdot b' - f(x,a)\cdot a' + \int_a^b f_x(x,t)\,dt \\
&= (2x)\,x^2 \cdot 2 - (x)\,x^2 \cdot 1 + \int_x^{2x} 2x\,t\,dt \\
&= 4x^3 - x^3 + \left(2x\,\tfrac{1}{2}t^2\right)\Big|_x^{2x} \\
&= 4x^3 - x^3 + (4x^3 - x^3) \\
&= 6x^3
\end{aligned}$$

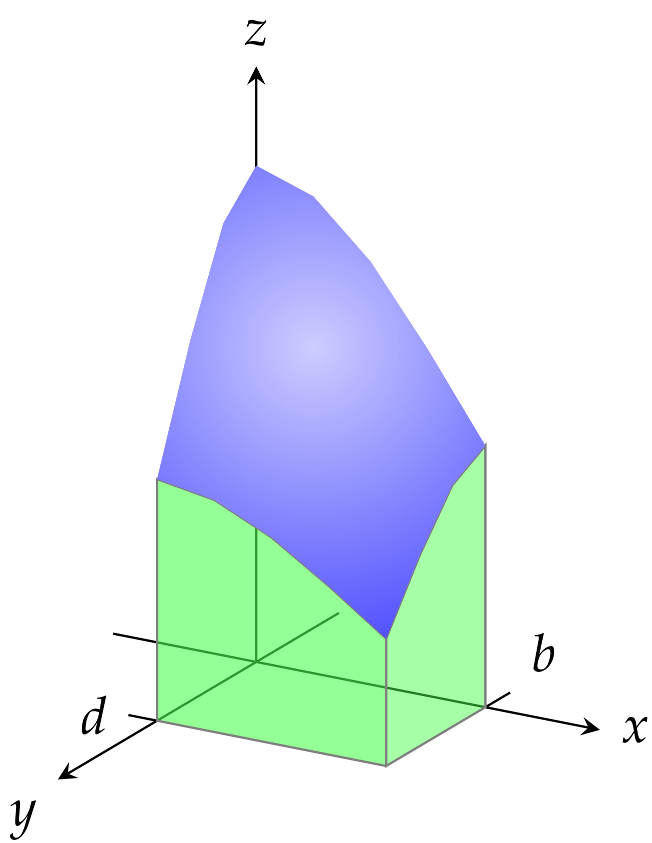
Volumen

Sei $f(x,y)$ eine Funktion definiert über dem Rechteck

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

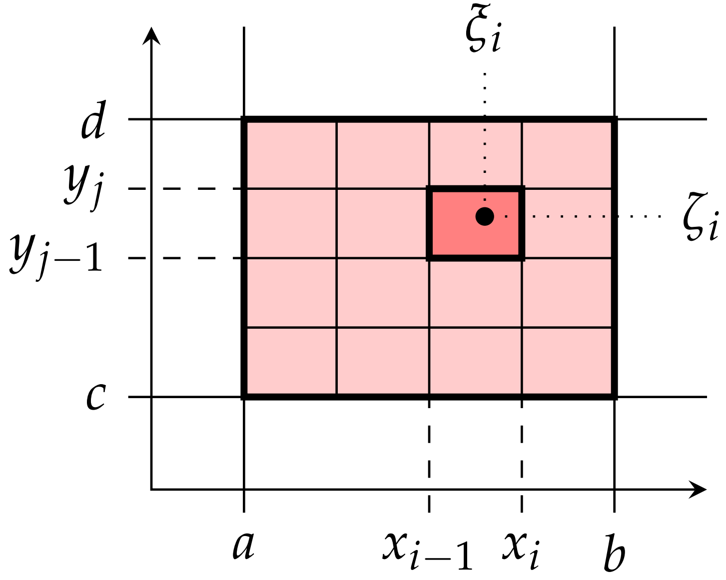
Wie groß ist das Volumen V unter dem Graphen von f?

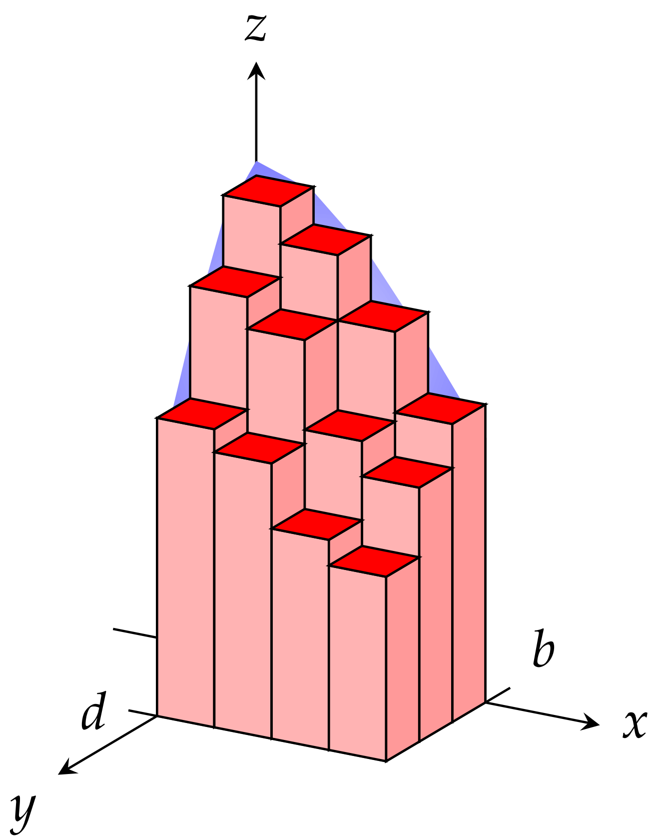




Riemann-Summen

- Zerlege R in kleine Rechtecke $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$
- Berechne $V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f(\xi_i, \zeta_j)\,(x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1})$





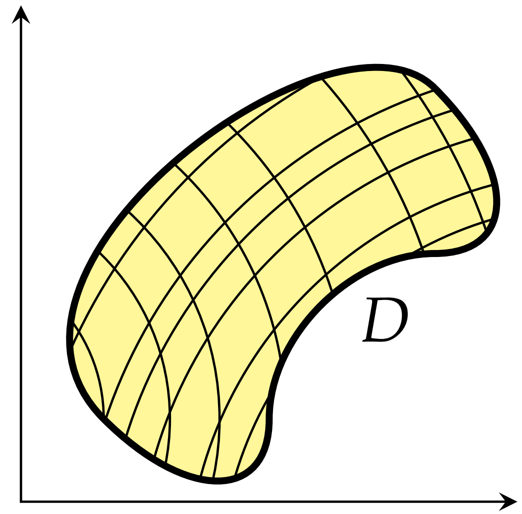
Riemann-Integral

Falls die **Riemann-Summe** für immer feinere Zerlegungen von R konvergiert, dann heißt dieser Grenzwert das **Riemann-Integral** von f über R:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n,k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f(\xi_i, \zeta_j)\,(x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1})}$$

Das Riemann-Integral ist analog auf beliebigen Gebieten D definiert.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$



Satz von Fubini

Sei $f\colon R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion. Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy\,.\end{aligned}}$$

Der Satz von Fubini liefert uns ein Rezept zur Berechnung von Doppelintegralen:

1. Fasse x als Konstante auf und berechne das innere Integral $\int_c^d f(x,y)\,dy$.
2. Integriere das Ergebnis nach x.

Wir dürfen aber auch die Reihenfolge vertauschen und zuerst nach x und erst dann nach y integrieren.

Beispiel

Berechne $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(1-x-y^2+xy^2)\,dx\,dy$.

Wir müssen zweimal integrieren.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(1-x-y^2+xy^2)\,dx\,dy \\
&\quad= \int_{-1}^{1}\left(x-\frac{1}{2}x^2-xy^2+\frac{1}{2}x^2y^2\bigg|_0^1\right)\,dy \\
&\quad= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y^2\right)\,dy = \frac{1}{2}y-\frac{1}{6}y^3\bigg|_{-1}^{1} \\
&\quad= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Integrationsgrenzen

Achtung, die Integrationsvariable und die dazu gehörigen Integrationsgrenzen sind von **innen** nach **außen** zu lesen.

Wenn wir die Reihenfolge beim Integrieren vertauschen, dann müssen wir das auch in der Reihenfolge der Integrationsgrenzen berücksichtigen:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Wir sehen das besser, wenn wir die (redundanten) Klammer einfügen:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Beispiel – Fortsetzung

Integration in umgekehrter Reihenfolge:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(1-x-y^2+xy^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\int_{-1}^{1}(1-x-y^2+xy^2)\,dy\right)\,dx$$

$$=\int_0^1\left(y-xy-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}xy^3\Big|_{-1}^{1}\right)\,dx$$

$$=\int_0^1\left(1-x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x-\left(-1+x+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x\right)\right)\,dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3}x\right)\,dx=\frac{4}{3}x-\frac{4}{6}x^2\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

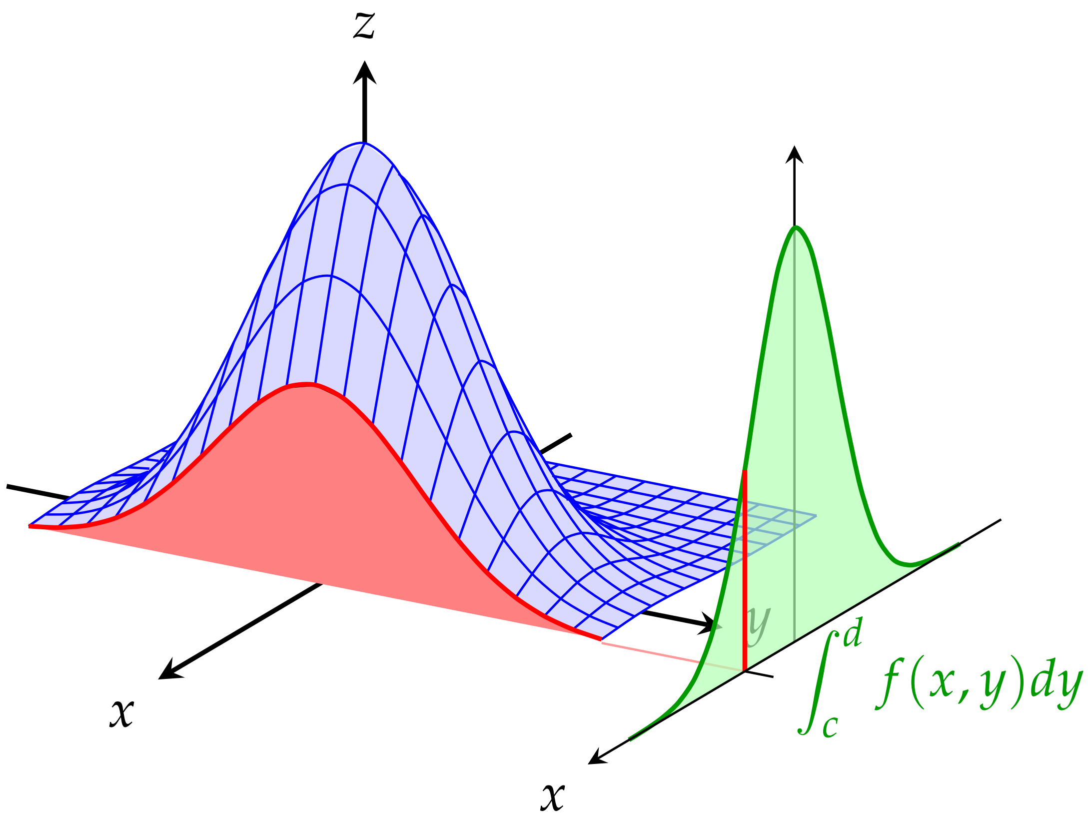
Satz von Fubini – Interpretation

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b A(x)dx$$

Wenn wir x festhalten, dann ist

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

die Fläche unter $g(y) = f(x,y)$.



Zusammenfassung

- Flächeninhalt und Riemann-Integral
- Stammfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Integrationsverfahren
- Uneigentliches Integral
- Differenzieren unter dem Integral
- Volumen und Doppelintegral
- Satz von Fubini