

Beispiel 1

Berechnen Sie die jährlichen Rückzahlungsraten (zu zahlen jeweils am Ende des Jahres) eines Kredits über 80 000 EURO bei einem Zinssatz von 6,5 % und einer Laufzeit von 10 Jahren.

6 Punkte

Beispiel 2

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 4 \\ x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 7 \end{array}$$

10 Punkte

Beispiel 3

Lösen Sie die Matrizengleichung nach X auf unten den Voraussetzungen , daß alle Matrizen quadratisch sind und die notwendigen Inversen existieren

$$AX + BX + F = D$$

6 Punkte

Beispiel 4

(a) Differenzieren Sie folgende Funktionen

$$f(x) = 3 \sin(x) + x^2$$

$$g(x) = e^4 x \cdot x^2$$

4 Punkte

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 (x^3 + 8x) dx$$

4 Punkte

(c) Berechnen Sie die Elastizität der Funktion

$$f(x) = 4x^3 - 3$$

an der Stelle 1.

4 Punkte

Beispiel 5

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3}$$

3 Punkte

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$e^{x^2+1} - 7 = 0$$

3 Punkte

Beispiel 6

Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem graphisch.

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ \text{NB:} & x_2 > 3 \\ & x_1 > 2 \\ & x_1 + x_2 > 8 \end{array}$$

7 Punkte

Beispiel 7

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

3 Punkte

Beispiel 8

Berechnen Sie die Ergebnisse folgender Matrizenprodukte bzw. bezeichnen Sie das Matrizenprodukt mit N.D. (nicht definiert), falls die Rechenoperation nicht definiert ist

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

2 Punkte

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

2 Punkte

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

2 Punkte

Beispiel 9

Überprüfen sie, ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

7 Punkte

Beispiel 10

Berechnen Sie das Extremum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 1$$

10 Punkte

Beispiel 11

Berechnen Sie die Hesse-Matrix der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 5y^3$$

im Punkt (1,1).

7 Punkte

Beispiel 12

Entwickeln Sie in eine MacLaurinreihe bis zur zweiten Potenz

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

10 Punkte

Beispiel 13

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + 6x^2 - 8x = 0$$

mit den Randbedingungen $y'(0) = 0$ und $y(0) = 1$.

10 Punkte

Beispiel 1

- (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = e^{x^3-x} + y^2$$

6 Punkte

- (b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

6 Punkte

Beispiel 2

- (a) Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{X}$ der Matrixgleichung

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{X}$ quadratische Matrizen gleicher Dimension sind, und daß $\mathbf{B}$ invertierbar ist.

5 Punkte

- (b) Welche Voraussetzungen müssen außerdem erfüllt sein, damit die Lösung existiert und eindeutig ist?

2 Punkte

Beispiel 3

- (a) Berechnen Sie die Elastizität von

$$f(x) = x^3 + 2x$$

3 Punkte

- (b) Bestimmen Sie die Bereiche in denen die Funktion elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch ist.

4 Punkte

Beispiel 4

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\text{Max } f(x) = e^{x^3-x}$$

$$\text{mit } 0 \leq x \leq 1.$$

8 Punkte

Beispiel 5

Bestimmen Sie die stationären Punkte von

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$y = x^2 + 1$$

10 Punkte

Beispiel 6

Lösen Sie die DG:

$$y'' + 4y = 0$$

7 Punkte

Beispiel 7

Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix bzw. erweiterter Koeffizientenmatrix die Anzahl der Lösungen für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. **5 Punkte**
- (b) Bestimmen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$. **3 Punkte**
- (c) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. **4 Punkte**
- (d) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? (Begründung). **2 Punkte**

Beispiel 8

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem graphisch:

$$\begin{aligned} \text{Max } & 3x + y \\ \text{NB : } & x \leq 5 \\ & y \leq 6 \\ & x + y \leq 8 \\ & 5x + 6y \leq 30 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

(Berechnen Sie die genauen Koordinaten des Maximums!)

11 Punkte

Beispiel 9

- (a) Entwickeln Sie in eine MacLaurin-Reihe bis zur zweiten Potenz

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

7 Punkte

- (b) Wie groß kann der Konvergenzradius höchstens sein?

2 Punkte

Beispiel 10

- (a) Berechnen Sie das Differential der Funktion

$$f(x, y) = e^{x^3 - x} + y^2$$

an der Stelle $(0, 0)$.

5 Punkte

- (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Differentials an der Stelle $\mathbf{x} = (0, 0)$ einen Näherungswert für den Funktionswert von f an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. **3 Punkte**

Beispiel 11

Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion:

$$\frac{x \cdot y}{x + 1} = 1$$

7 Punkte

Beispiel 1

Berechnen Sie alle stationären Punkte von

$$f(x, y) = 2x^3 - 13x^2 + y^2 - 4y + 6$$

unter der Nebenbedingung

$$x - y = -2$$

10 Punkte

Beispiel 2

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

- (a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems. **6 Punkte**
- (b) Bestimmen Sie die Ränge von Koeffizientenmatrix und erweiterter Koeffizientenmatrix. **3 Punkte**
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems. **3 Punkte**
- (d) Ist die erweiterte Koeffizientenmatrix invertierbar (Begründung)? **3 Punkte**

Beispiel 3

Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -9 & 1 & -2 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

Beispiel 4

- (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 2x^3 - 15x^2 + y^2 - 4y + 6$$

- (b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. **6 Punkte**
- (c) Ist die Funktion im $\mathbb{R}^2$ konvex? **3 Punkte**

Beispiel 5

(a) Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus:

$$x + y \rightarrow \max$$

$$x \leq 10$$

$$y \leq 10$$

$$x + y \leq 12$$

$$x, y \geq 0$$

10 Punkte

(b) Ist die Lösung eindeutig? Wenn nein, geben Sie eine weitere Lösung an.

4 Punkte

Beispiel 6

(a) Berechnen Sie die Elastizität von

$$f(x) = 3x^{-3} + x^{-2}, \quad x > 0$$

4 Punkte

(b) In welchen Bereichen ist die Funktion elastisch, 1-elastisch und unelastisch?

4 Punkte

Beispiel 7

(a) Ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |\sin(\pi x)|$$

stetig und/oder differenzierbar? Wenn nein, in welchen Punkten ist die Funktion nicht stetig/differenzierbar?

5 Punkte

(b) Berechnen Sie die erste Ableitung von

$$f(x) = \sin(\pi x^2) \cdot e^x$$

5 Punkte

Beispiel 8

(a) Berechnen Sie die jährlichen Rückzahlungsraten für einen Kredit über 250 000 GE bei einer Verzinsung von 7% p.a. und einer Laufzeit von 15 Jahren.

4 Punkte

(b) Berechnen Sie den Endwert der Rückzahlungsraten.

3 Punkte

Beispiel 9

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - y' + \frac{37}{4}y = 0$$

6 Punkte

(b) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' - y' + \frac{37}{4}y = \frac{37}{2}$$

3 Punkte

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y' + \frac{37}{4}y = 0$$

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 1$$

(d) Ist die Lösung konvergent? Wenn ja, wie lautet der Grenzwert?

4 Punkte

2 Punkte

Beispiel 1

Finden Sie alle stationären Punkte von

$$f(x, y) = y^3 + x^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 - y = 1$$

10 Punkte

Beispiel 2

Berechnen Sie das globale Minimum der Funktion

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

im Intervall $[0, 4]$.

8 Punkte

Beispiel 3

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie

$$(A \cdot B)^{-1} \vec{x} = \vec{b}$$

6 Punkte

Beispiel 4

Sei

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + x^2 y^2 + z^2$$

(a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f .

7 Punkte

(b) Berechnen Sie die Hessematrix von f .

5 Punkte

(c) Kann mit Hilfe der Hessematrix an der Stelle des/der stationären Punkte(s) bestimmt werden, ob es sich dabei um lokale Extrema handelt. (Begründung)

2 Punkte

Beispiel 5

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A .

6 Punkte

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von A .

6 Punkte

Beispiel 6

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

6 Punkte

Beispiel 7

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 9 \\ 9x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

8 Punkte

Beispiel 8

(a) Berechnen Sie die jährliche Rückzahlungsrate für einen Kredit über 150000,- GE mit einer Verzinsung von 8,125% p.a. und einer Laufzeit von 12 Jahren. **4 Punkte**

(b) Wie groß muß die Laufzeit mindestens sein, wenn der Kreditnehmer bei gleicher Verzinsung höchstens 15000,- GE jährlichen Rückzahlungen leisten kann. **5 Punkte**

(c) Kann die Bank den Kredit gewähren, wenn der Kreditnehmer höchst 10000,- GE pro Jahr zurückzahlen kann. (Begründung) **4 Punkte**

Beispiel 9

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\left. \begin{aligned} y'' - 4y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

10 Punkte

Beispiel 10

Lösen Sie folgendes Problem aus dem *Jiuzhang* (ca. 500 v.u.Z.):

Drei Personen, die 560, 350 bzw. 180 Goldmünzen besitzen, müssen insgesamt 100 Münzen Steuer proportional zu ihrem Vermögen bezahlen. Wie viel muß jeder bezahlen? (Runden Sie auf ganze Zahlen.) **4 Punkte**

Beispiel 11

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus:

$$4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcll} \text{NB:} & x_1 & \leq & 7 \\ & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

9 Punkte

Beispiel 1

- (a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial a}$ der Funktion:

$$f(a) = \ln(a) + a \sin^2(a)$$

3 Punkte

- (b) Berechnen Sie:

$$\int_1^2 (x^2 + 2x) dx$$

3 Punkte

Beispiel 2

- (a) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{4n^2 + 3n}{2n}$$

4 Punkte

- (b) Berechnen Sie die Elastizität der Funktion:

$$f(x) = \alpha x + x^2$$

6 Punkte

Beispiel 3

Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

Beispiel 4

- (a) Lösen Sie die DG:

$$y' + 2yx = 0$$

- (b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen in die DG.

10 Punkte

Beispiel 5

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x, y) = x^2y + 2y^3 - 4$$

- (a) Berechnen Sie die stationären Punkte der Funktion f .

5 Punkte

- (b) Berechnen Sie die Hessematrix.

5 Punkte

Beispiel 6

Berechnen Sie das globale Maximum der Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x$$

im Intervall $[-2, 4]$.

8 Punkte

Beispiel 7

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem graphisch:

$$\begin{array}{ll} \max / \min & 2x_1 + x_2 \\ \text{unter den NB:} & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

10 Punkte

Beispiel 8

Berechnen Sie den Kreditbetrag, falls die Laufzeit 10 Jahre, die Verzinsung 7% und die jährlichen nachschüssigen Rückzahlungsraten 100 000 Geldeinheiten betragen.

10 Punkte

Beispiel 9

Lösen Sie folgende Matrizengleichung. Nehmen Sie an, daß alle Matrizen quadratische Matrizen gleicher Größe sind und die "notwendigen" Inversen Matrizen existieren.

$$F(AX + C) = CX$$

8 Punkte

Beispiel 10

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

10 Punkte

Beispiel 11

Finden Sie die stationären Punkte von

$$f(x_1, y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 1$$

12 Punkte

Beispiel 1

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix A .

6 Punkte

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A^{-1} .

4 Punkte

Beispiel 2

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - 2x = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = 6$

6 Punkte

(b) Lösen Sie $y'' - 5y' + 4 = 0$

6 Punkte

Beispiel 3

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y, z) = e^x + e^y + e^{z^2} - (x + y)$$

6 Punkte

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

6 Punkte

Beispiel 4

Entwickeln Sie in eine MacLaurin-Reihe 2. Ordnung:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

8 Punkte

Beispiel 5

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 1}{x^2} dx$$

8 Punkte

Beispiel 6

Berechnen Sie die Bereiche, in denen $f(x) = e^{2x^2}$ elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch ist.

10 Punkte

Beispiel 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -5 & 2 & -8 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie den Rang von A . **6 Punkte**
- (b) Berechnen Sie die Determinante von A . **4 Punkte**
- (c) Ist A invertierbar? **4 Punkte**
- (d) Besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung? Berechnen Sie nicht die Lösung, sondern versuchen Sie mit Hilfe des Ranges eine Aussage zu machen. **4 Punkte**

Beispiel 8

Berechnen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren die stationären Punkte von

$$f(x, y) = e^{2x} + e^{2y}$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 3$$

8 Punkte

Beispiel 9

Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y, z) = e^{(2x+y)} + \ln z$$

im Punkt $(0, 0, -1)$ in Richtung $(-2, 1, 3)$.

8 Punkte

Beispiel 1

Entwickeln Sie in eine MacLaurin-Reihe 3. Ordnung.

$$f(x) = \sin(2x + \pi)$$

8 Punkte

Beispiel 2

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix A .

6 Punkte

(c) Geben Sie die Definitheit von A an.

2 Punkte

Beispiel 3

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + (x_3 - 1)^2$$

6 Punkte

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

7 Punkte

(c) Besitzt die Funktion ein globales Maximum?

2 Punkte

(d) Ist die Funktion konvex oder konkav?

2 Punkte

Beispiel 4

(a) Lösen Sie die DG

$$y'' + y' - 2y = 1$$

8 Punkte

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 2y = 1$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

4 Punkte

Beispiel 5

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie die Determinante von A. **3 Punkte**
 (b) Geben Sie den Rang von A an. **2 Punkte**
 (c) Berechnen Sie die Inverse von A. **8 Punkte**
 (d) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Punkte

Beispiel 6

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 2 & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ x-2 & \text{für } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \mathbf{12 \text{ Punkte}}$$

Beispiel 7

- (a) Bestimmen Sie die Elastizität von

$$f(x) = \alpha x^{-\beta} \quad \alpha, \beta \in (0, \infty)$$

5 Punkte

- (b) Für welche Werte von α, β und x ist $f(x)$ elastisch?

3 Punkte

Beispiel 8

Berechnen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren die stationären Punkte von

$$f(x, y) = x^3 + x - y$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = -1$$

10 Punkte

Beispiel 9

Berechnen Sie die jährlichen Rückzahlungsraten für einen Kredit über 150000 S mit einer Verzinsung von 8,125% und eine Laufzeit von 5 Jahren **4 Punkte**

Beispiel 1

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5 Punkte

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix A .

5 Punkte

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A^{-1} .

4 Punkte

Beispiel 2

Entwickeln Sie in eine MacLaurin-Reihe 2. Ordnung

$$f(x) = e^{(x^2+2x)}$$

10 Punkte

Beispiel 3

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - \frac{3x^2}{2y} = 0$$

6 Punkte

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - \frac{3x^2}{2y} = 0 \quad y(0) = 3$$

6 Punkte

Beispiel 4

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + e^{2x} \right) dx$$

9 Punkte

Beispiel 5

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + y^4 - 4x - 32y$$

6 Punkte

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. Kann man auch eine globale Aussage machen?

6 Punkte

Beispiel 6

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion

$$f(x) = e^{2x^2}$$

elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch ist.

10 Punkte

Beispiel 7

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem graphisch.

(a)

$$\begin{array}{ll}\max/\min & 3x_1 + x_2 \\ \text{unter} & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

5 Punkte

(b) Wie ändert sich die Lösung, wenn man zusätzlich die Nebenbedingung $x_1 = 3$

5 Punkte

Beispiel 8

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie den Rang der Matrix A .

4 Punkte

(b) Berechnen Sie die Lösung der Gleichung $Ax = b$.

3 Punkte

(c) Berechnen Sie die Determinante von A .

3 Punkte

(d) Ist A invertierbar?

3 Punkte

Beispiel 9

Berechnen Sie die stationäre Punkte von

$$f(x, y) = e^{(4x^2 + 8y)}$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 2$$

mittels Lagrangemultiplikatoren.

10 Punkte

Beispiel 1

Entwickeln Sie in eine MacLaurin-Reihe 2. Ordnung

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x^2}$$

8 Punkte

Beispiel 2

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & -17 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix A .

7 Punkte

(c) Geben Sie die Definitheit von A an.

2 Punkte

Beispiel 3

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot e^{2x}$$

6 Punkte

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

7 Punkte

Beispiel 4

Lösen Sie das Anfangswert

$$y' - y = 1$$

$$y(0) = 10$$

9 Punkte

Beispiel 5

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A .

3 Punkte

(b) Geben Sie den Rang von A an.

2 Punkte

(c) Berechnen Sie A^{-1} .

8 Punkte

(d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Punkte

Beispiel 6

- (a) Berechnen Sie die jährlichen Rückzahlungsraten für einen Kredit über 210.000 S mit einer Verzinsung von 7,125% und einer Laufzeit von 8 Jahren. **4 Punkte**
- (b) Wie lange muß die Laufzeit des Kredits mindestens sein, damit die Rückzahlungsraten 30.000 S nicht übersteigen? **4 Punkte**
- (c) Kann die Bank eine jährliche Rückzahlungsrate von 10.000 S akzeptieren? (warum/warum nicht?) **4 Punkte**

Beispiel 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{(x^2 + 1)}{x} dx$$

7 Punkte

Beispiel 8

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion

$$f(x) = x \cdot e^x$$

elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch ist.

10 Punkte

Beispiel 9

Berechnen Sie mittels Lagrangemultiplikatoren die stationäre Punkte von

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} \cdot e^{2x}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x + y = 0$$

10 Punkte

Beispiel 1

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

7 Punkte

Beispiel 2

Berechnen Sie alle stationären Punkte von

$$f(x, y) = xy - x^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 1$$

11 Punkte

Beispiel 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie $\det(A)$.
- (b) Berechnen Sie den Rang von A.
- (c) Ist A invertierbar? (Begründung)
- (d) Lösen Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

5 Punkte

2 Punkte

2 Punkte

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -10 \\ 22 \end{pmatrix}$$

8 Punkte

- (e) Löse Sie $A\vec{x} = 0$

2 Punkte

Beispiel 4

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \sqrt[8]{x^7} \, dx$$

7 Punkte

Beispiel 5

- (a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von

$$f(x, y, z) = x^2 - xy + 2y^2 + z^2$$

8 Punkte

- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um Minimum, Maximum oder Sattelpunkte handelt.

5 Punkte

Beispiel 6

Entwickeln Sie in eine MacLaurin-Reihe bis zur 3. Ordnung.

(a) $f(x) = \sin(x^2)$

7 Punkte

(b) $g(x) = x \cdot \sin(x^2)$

2 Punkte

Beispiel 7

Im Giogranni Eissalon kostet ein Stanitzel mit einer Eiskugel 7.-, ein Stanizel mit drei Kugeln 20.-. Wieviel kostet das Stanitzel?

4 Punkte

Beispiel 8

Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y, z) = e^{xy} + z^2$$

im Punkt $(0, 0, 1)$ in Richtung $(1, -1, 3)$.

6 Punkte

Beispiel 9

- (a) Lösen Sie die DG

$$y' + y^3 = 0$$

8 Punkte

- (b) ist die DG linear?

2 Punkte

- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

$$y' + y^3 = 0$$

$$y(0) = 2$$

3 Punkte

Beispiel 10

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus

$$\max \quad z = x + y$$

$$x \leq 6$$

$$y \leq 8$$

$$2x + y \leq 14$$

$$x + y \leq 10$$

$$x, y \geq 0$$

- (a) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

9 Punkte

- (b) Was können Sie über die Anzahl der Lösungen des Optimierungsproblems sagen?

2 Punkte

Beispiel 1

- (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ in eine Taylorreihe um den Punkt 0. Berechnen Sie die Elemente bis zur Ordnung 3.

7 Punkte

- (b) Bestimmen Sie näherungsweise den Wert der Funktion an der Stelle $x = 0,5$.

3 Punkte

Beispiel 2

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Punkte

Hinweis: Suchen Sie den ersten Eigenwert durch Einsetzen von +1, -1, +2, -2, usw.

- (b) Berechnen Sie einen Eigenvektor zu einem beliebigen Eigenwert.

3 Punkte

Beispiel 3

- (a) Berechnen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 7x$$

7 Punkte

- (b) Berechnen Sie die Hessematrix und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

4 Punkte

Beispiel 4

- (a) Bilden Sie die Inverse zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Punkte

- (b) Prüfen Sie, ob Sie die Inverse richtig berechnet haben.

3 Punkte

Beispiel 5

- (a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\text{Max } z = 3x + 2y$$

$$x \leq 4$$

$$y \leq 8$$

$$2x + y \leq 10$$

$$x, y \geq 0$$

mit dem Simplexalgorithmus.

9 Punkte

(b) Welche sind die Restriktionen, die das Maximum begrenzen?

2 Punkte

Beispiel 6

Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = \ln(xy)$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 1$$

mittels Lagrangmultiplikatoren.

10 Punkte

Beispiel 7

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + (x + 1)^2 y^2 = 0$$

7 Punkte

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $y(1) = 1$.

3 Punkte

Beispiel 8

Betrachten Sie das Gleichungssystem $Ax=b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gibt es Werte von a , für welche das Gleichungssystem nicht lösbar ist? Gibt es Werte, für welche es unendlich viele Lösungen besitzt?

10 Punkte

Beispiel 9

Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{\partial x}{\partial y}$ der impliziten Funktion $\frac{1}{2x^2 - y^2} = 5$.

8 Punkte

Beispiel 10

(a) Berechnen Sie die Elastizität von

$$f(x) = x \cdot \exp(-x^2)$$

7 Punkte

(b) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch ist.

3 Punkte

Beispiel 1

Entwickeln Sie in eine MacLaurin-Reihe bis zur 2. Ordnung:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

10 Punkte

Beispiel 2

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

10 Punkte

Beispiel 3

Der Arlbergstraßentunnel ist 14 km lang. Wie lange dauert die Durchfahrt (in Minuten) für ein Auto, das mit 70 km/h unterwegs ist.

4 Punkte

Beispiel 4

Berechnen Sie

$$\int \frac{9x^2 + 5}{3x^3 + 5x - 1} + 1 \, dx$$

8 Punkte

Beispiel 5

Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y, z) = 3x^2 + xy + 7z^2 - zy^2$$

im Punkt (1, -6, 1) in Richtung (-2, 2, 1).

7 Punkte

Beispiel 6

Berechnen Sie mit den Simplexalgorithmus

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & 2x + 3y \\ \text{NB:} & 2x + y \leq 10 \\ & x + 2y \leq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

10 Punkte

Beispiel 7

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 7 \\ -10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie $\det(A)$. **4 Punkte**
- (b) Berechnen Sie den Rang von A. **2 Punkte**
- (c) Ist A invertierbar? (Begründung) **1 Punkt**
- (d) Sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig? (Begründung) **1 Punkt**
- (e) Berechnen Sie $\det(A \cdot B)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3 Punkte

- (f) Lösen Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **7 Punkte**

Beispiel 8

- (a) Lösen Sie die DG

$$y' - \frac{1}{y^2} = 0$$

8 Punkte

- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - \frac{1}{y^2} = 0$$

$$y(0) = 1$$

2 Punkte

Beispiel 9

Berechnen Sie alle stationären Punkte von

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 - 2x_2 = 1$$

10 Punkte

Beispiel 10

- (a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von

$$f(x, y) = (x - y)^3 - 24(x - y) + (x + y)^2$$

7 Punkte

- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

6 Punkte

Beispiel 1

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral.

Ist es definiert?

$$\int_{-1}^0 (x+1)^{-\frac{3}{4}} dx$$

8 Punkte

Beispiel 2

Entwickeln Sie

$$f(x) = x \cdot e^x$$

in eine MacLaurin-Reihe bis zur 2. Ordnung.

8 Punkte

Beispiel 3

(a) Lösen Sie die DG

$$y' = -y^3$$

7 Punkte

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\left. \begin{array}{l} y' = -y^3 \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

3 Punkte

Beispiel 4

Suchen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1$$

mittels Lagrangemultiplikatoren.

12 Punkte

Beispiel 5

(a) Berechnen Sie die Elastizität von

$$f(x) = x^3 + 1$$

3 Punkte

(b) Wo ist f 1-elastisch?

6 Punkte

Beispiel 6

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

6 Punkte

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von A .

6 Punkte

Beispiel 7

(a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

(b) B sei eine 5 x 5 Matrix mit $\det(B) = 1$. Berechnen Sie $\det(B^{-1} \cdot A \cdot B)$.

3 Punkte

(c) Bestimmen Sie den Rang von A.

2 Punkte

Beispiel 8

Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7 Punkte

Beispiel 9

Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion

$$e^{(x^2-y^2)} = 1$$

6 Punkte

Beispiel 10

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus

$$\text{Max } 2x + y$$

$$\begin{aligned} \text{NB: } \quad x + y &\leq 20 \\ 3x + 2y &\leq 30 \end{aligned}$$

8 Punkte

Beispiel 11

(a) Berechnen Sie die jährliche Rückzahlungsrate eines Kredites in der Höhe von 135.000 Geldeinheiten bei einer Verzinsung von 11,5 % p.a. und eine Laufzeit von 8 Jahren.

4 Punkte

(b) Nach drei Jahren steigt die Verzinsung auf 12,25 %. Wie hoch ist die neue Kreditrate?

5 Punkte

Beispiel 1

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Prüfungskandidaten und -kandidatinnen in einem Hörsaal mit 48 Sitzplätzen zu verteilen?

6 Punkte

Beispiel 2

Berechnen Sie

$$\int_0^1 (1-x)^2 dx$$

6 Punkte

Beispiel 3

Entwickeln Sie

$$f(x) = e^{-x^2}$$

in eine MacLaurin-Reihe bis zur 2. Ordnung.

10 Punkte

Beispiel 4

(a) Lösen Sie die DG

$$y' - (1-x)y = 0$$

7 Punkte

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\left. \begin{array}{l} y' - (1-x)y = 0 \\ y(0) = 2 \end{array} \right\}$$

3 Punkte

Beispiel 5

Suchen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3 + x_2$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

mittels Lagrangemultiplikatoren.

10 Punkte

Beispiel 6

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(a) Berechnen Sie die Elastizität von $f(x)$.

4 Punkte

(b) Wo ist $f(x)$ elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch?

6 Punkte

Beispiel 7

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{NB:} & 2x_1 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- (a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus. **8 Punkte**
- (b) Lösen Sie das Problem graphisch. Bezeichnen Sie die Eckpunkte, die den mit dem Simplexalgorithmus erstellten Tableaus entsprechen (T_0, T_1, T_2). **6 Punkte**

Beispiel 8

- (a) Bestimmen Sie die Lösung(en) des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{10 \text{ Punkte}}$$

- (b) Berechnen Sie den Rang von A . **2 Punkte**

Beispiel 9

- (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f(x, y, z) = x^4 - x^2 + y^2 + z^2$. **6 Punkte**
- (b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima handelt. **5 Punkte**

Beispiel 10

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A . **5 Punkte**
- (b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von A . **6 Punkte**

Beispiel 1

Bestimmen Sie:

(a)

$$\int \frac{1}{(1+3x)^2} dx$$

6 Punkte

(b)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(1+3x)^2} dx$$

5 Punkte

Beispiel 2

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte.

6 Punkte

(b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema von a) auch um globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort!

5 Punkte

Beispiel 3

(a) Entwickeln Sie $f(x) = x^2 \ln(x)$ in eine Taylorreihe bis zum Glied 3. Ordnung um den Punkt 1.

7 Punkte

(b) Vergleichen Sie die Approximation und den tatsächlichen Funktionswert für $x = 1, 2$.

3 Punkte

Beispiel 4

Eine Firma hat zwei Maschinen I und II, die 3 Produkte A, B und C erzeugen. Maschine I ist täglich 10 Stunden in Betrieb, Maschine II täglich 5 Stunden.

Produkt A bringt einen Erlös von 1000 und benötigt Maschine I eine Stunde.

Produkt B bringt einen Erlös von 2000 und benötigt Maschine I und II je eine Stunde.

Produkt C bringt einen Erlös von 500 und benötigt Maschine II eine Stunde.

Mit welcher Produktkombination wird der Erlös maximiert?

(a) Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem.

5 Punkte

(b) Lösen Sie es mit dem Simplex Algorithmus.

7 Punkte

Beispiel 5

Berechnen Sie die stationären Punkte von

$$f(x, y, z) = x \cdot y + z$$

unter der Nebenbedingung

$$x - y + z = 1$$

mittels Lagrangemultiplikatoren.

10 Punkte

Beispiel 6

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

12 Punkte

Beispiel 7

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy^2$$

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte .

6 Punkte

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

6 Punkte

Beispiel 8

(a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

4 Punkte

(b) Welchen Rang hat die aus den 4 Vektoren gebildete Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

4 Punkte

(c) Ist für den Vektor $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Gleichung $Ax = b$ eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

4 Punkte

Beispiel 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Inverse Matrix A^{-1} .

5 Punkte

(b) Berechnen Sie die Determinante von A .

2 Punkte

(c) B ist eine 2x2 Matrix mit Determinante 3. Bestimmen Sie $\det(A \cdot B^{-1})$.

3 Punkte

Beispiel 1

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie $\det(A \cdot B)$.

3 Punkte

(b) Berechnen Sie $\det(A^{-1})$.

3 Punkte

Beispiel 2

Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen von

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 + 2)}{\cos(x^2 - 2)} + e^{x^2+2} \cdot y^2 + 10$$

8 Punkte

Beispiel 3

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte von

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 + 2$$

6 Punkte

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

7 Punkte

Beispiel 4

Sei $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$

(a) Berechnen Sie die lokalen Extremwerte von f .

5 Punkte

(b) Berechnen Sie die globalen Extremwerte von f in Intervall $[0, 2]$.

4 Punkte

Beispiel 5

Berechnen Sie die stationären Punkte von

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 1$$

mittels Lagrangemultiplikatoren.

10 Punkte

Beispiel 6

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 11 & 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie den Vektor $\vec{x}$ aus $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

8 Punkte

Beispiel 7

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 23 & -36 \\ -36 & 2 \end{pmatrix}$$

10 Punkte

Beispiel 8

Die folgenden Vektoren spannen einen Vektorraum auf:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Sind diese Vektoren linear unabhängig? **2 Punkte**
- (b) welche Dimension hat der von v_1, v_2, v_3, v_4 erzeugte Raum? **3 Punkte**
- (c) Geben Sie eine Basis für den von v_1, v_2, v_3, v_4 erzeugten Raum an, und zeigen Sie, daß tatsächlich eine Basis vorliegt. **4 Punkte**

Beispiel 9

Entwickeln Sie

$$f(x) = 2^x$$

in eine MacLaurinreihe bis zur 3. Potenz.

7 Punkte

Beispiel 10

Existiert das folgende uneigentliche Integral?

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

10 Punkte

Beispiel 11

Lösen Sie

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Was können Sie über das Langzeitverhalten ($t \rightarrow \infty$) von $y(t)$ sagen?

10 Punkte

Beispiel 1

Entwickeln Sie $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ an der Stelle 1 in eine Taylorreihe bis zur 4. Potenz. Vergleichen Sie $f(0)$ mit der Näherung der abgebrochenen Taylorreihe an der Stelle 0.

8 Punkte

Beispiel 2

Entwickeln Sie $f(x, y) = x^y$ an der Stelle $(1, 0)$ in eine Taylorreihe bis zum Glied 2. Ordnung.

9 Punkte

Beispiel 3

Geben Sie die Dimension des Vektorraumes an, den die folgenden Vektoren aufspannen.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6 Punkte

Beispiel 4

Wie groß ist $\text{rg}(A)$?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

5 Punkte

Beispiel 5

Ein Konditorprodukt kostete 1974 S 3.-. 1994 beträgt der Preis S 16.-.

Wie groß ist die durchschnittliche Preissteigerungsrate?

6 Punkte

Beispiel 6

Lösen Sie das folgende lineare Problem mit dem Simplexalgorithmus.

$x_1 \geq 0$		$x_2 \geq 0$		$x_3 \geq 0$	
$2x_1$	+	x_2			≤ 6
		x_2	+	$2x_3$	≤ 6
x_1	+			x_3	≤ 4
$4x_1$	+	x_2	+	x_3	$\rightarrow \max$

8 Punkte

Beispiel 7

Für welche $\mu \in \mathbb{R}$ ist $\text{rg}(A) = 1$?

(a)

$$A = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8 Punkte

Beispiel 8

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9 Punkte

Beispiel 9

Maximieren Sie mit Hilfe von Lagrange - Multiplikatoren.

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \\ \text{N.B.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{array}$$

8 Punkte

Beispiel 10

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{1}{1-x} dx$$

7 Punkte

Beispiel 11

Differenzieren Sie

$$\frac{x \ln(1+2x)}{x+1}$$

8 Punkte

Beispiel 12

Wieviele Möglichkeiten gibt es aus 5 Personen bestehend aus 3 Männer und 2 Frauen, eine Vorsitzende und einen Stellvertreter auszuwählen.

6 Punkte

Beispiel 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = ?$$

Hinweis: Probieren Sie verschiedene Werte für x .

6 Punkte

Beispiel 14

Der Erlös einer Investition beträgt im Jahre 2000 S 5 Mio. Geben Sie den zugehörigen Barwert (bezüglich 1994) bei einer Verzinsung von 8% p.a. an.

6 Punkte

Beispiel 1

- (a) Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = y - 2/x = 0$$

mittels Lagrange-Multiplikatoren.

8 Punkte

- (b) Stellen Sie mittels einer Skizze fest, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

5 Punkte

Beispiel 2

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus. Geben Sie die optimale Wahl von (x_1, x_2, x_3) an und berechnen Sie den Wert der Zielfunktion im Optimum.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & \longrightarrow & \text{Max} \\ x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 4 \end{array}$$

10 Punkte

Beispiel 3

- (a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x, y) = \sin(\pi xy)$$

in eine Taylorreihe bis zu den Gliedern zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 0)$.

9 Punkte

- (b) Vergleichen Sie den Funktionswert und den Wert der Taylorreihe im Punkt $(1, 2|0.1)$.

5 Punkte

Beispiel 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- (a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A .

5 Punkte

- (b) Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 31 \\ 12 \end{pmatrix}$, eindeutig lösbar? Begründung!

4 Punkte

Beispiel 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- (a) Berechnen Sie **alle** Eigenwerte von A . **4 Punkte**
(b) Berechnen Sie **alle** Eigenvektoren von A . **6 Punkte**

Beispiel 6

Sie benötigen für eine Eigentumswohnung 2 Mio. Schilling und können zwischen 2 Möglichkeiten wählen:

Variante A: Ein geförderter Kredit für 2 Mio. S mit 10 Jahren Laufzeit und einem Zinssatz von 3%;

Variante B: Eine Förderung von 0,5 Mio S, die sofort ausbezahlt wird. Für die restlichen 1,5 Mio S muß dann ein Privatkredit mit Laufzeit 10 Jahre und einem Zinssatz von 9% genommen werden.

Vergleichen Sie, welche Variante günstiger ist, indem Sie die jährlichen Rückzahlungsraten für Variante A und B berechnen. **8 Punkte**

Beispiel 7

Gegeben ist die Nachfragefunktion

$$q(p) = \frac{p^2 - p + 16}{p^3} \quad p > 14$$

- (a) Bestimmen Sie die Elastizität der Nachfragefunktion. **5 Punkte**
(b) Für welche Werte von p ($p > 14$) ist die Nachfrage 1-elastisch. **4 Punkte**
(c) Für $p > 14$: In welchem Bereich ist die Nachfrage unelastisch, in welchem Bereich ist sie elastisch? **4 Punkte**

Beispiel 8

Ein Fahrradschloß hat 4 Ziffernkränze nebeneinander. Auf jedem Ziffernkranz sind die Ziffern von 1 bis 6 vorhanden.

- (a) Wieviele verschieden Möglichkeiten gibt es insgesamt? **4 Punkte**
(b) Wiviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, wenn die erste und die letzte Ziffer gleich sind? **3 Punkte**

Beispiel 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

- (a) Invertieren Sie die Matrix A mit dem Austauschverfahren. **7 Punkte**
(b) Berechnen Sie die Determinante von A . **3 Punkte**

Beispiel 10

Lösen Sie die Matrixgleichung

$$XA - B = X$$

nach X auf.

6 Punkte