Mathematik I
Musterklausuren

mit Lösungen

Institut für Statistik
der Wirtschaftsuniversität Wien

2. Februar 1999

Redaktion und Satz: `Josef.Leydold@statistik.wu-wien.ac.at`

Klausurbeispiele

27. Jänner 1998

1. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix bzw. erweiterten Koeffizientenmatrix die Anzahl der Lösungen für das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

(d) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Bestimmen Sie die Bereiche in denen die Funktion

$$f(x) = e^{(x^2+1)}$$

elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch ist.

3. Bestimmen Sie die stationären Punkte für

$$\begin{aligned} \min f(x,y) &= 400 + 5\,x^2 + y^2 \\ \text{NB:} \quad & 5\,x + y = 12 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren.

4. Lösen Sie die Optimierungsaufgabe

$$\text{Max/Min} \quad f(x) = 4\,|x+2| - \frac{4}{3}x^3,$$

wobei $-4 \le x \le 4$.

5. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$f'(x) + 2\,f(x) - 8 = 0$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = 5$.

6. (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion:

$$f(x,y) = e^{-x} + e^{y} + 5x - 2y$$

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

7. (a) Lösen Sie graphisch das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{min / max} \quad & 4x_1 + 2x_2 \\ \text{NB:} \quad & x_1 \leq 7 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Wie ändert sich die Lösung durch das Hinzufügen der weiteren Nebenbedingung:

$$x_1 \geq 10$$

8. Berechnen Sie $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}$ der impliziten Funktion:

$$\ln(x_1 + x_2) + x_3^2 = 0$$

9. (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie unter zu Hilfenahme der Determinante von $\mathbf{A}$ die Determinaten der folgenden zwei Matrizen.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

29. September 1997

10. Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

11. Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{X}$ der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{X}$$

Gehen Sie davon aus, daß die diversen Matrixoperationen alle definiert (Zeilen- bzw. Spaltenanzahl der Faktormatrizen, Invertierbarkeit) sind.

12. Berechnen Sie $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ der implizit gegebenen Funktion

$$x^2 + y + e^{x+y} = 1$$

13. Berechnen Sie das Ergebnis der Vereinfachung des Matrixausdrucks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14. Das folgende lineare Optimierungsproblem hat unendlich viele Maxima:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{NB:} & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \end{array}$$

Zeigen Sie diese Eigenschaft

(a) mit Hilfe der graphischen Lösung des Problems,

(b) mit Hilfe der Lösung durch den Simplexalgorithmus.

Begründen Sie Ihre Lösung in beiden Fällen in Stichworten.

15. Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 1} + e^{x_2^2 - 2} + 3$$

hat in $x_1 = 0, x_2 = 0$ ein Minimum. Weisen Sie die Minimumseigenschaft mit der Hessematrix nach.

16. Welches Krümmungsverhalten (konkav/konvex, Änderungen der Krümmung) hat die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^4$$

17. Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aus Beispiel 10.

18. Bestimmen Sie die Kofaktoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

19. Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + (x_1 - x_2)^2$$

20. Zeichnen Sie die Höhenlinie für $f(x_1, x_2) = 10$ der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 3$$

26. Juni 1997

21. (a) Berechnen sie $\frac{df}{dx}$ für $f(x) = e^{ax^2+b} - c$.

(b) Berechnen sie $\frac{df}{dx}$ für $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$.

(c) Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion $y^3 - x^2 + 3xy = 1$.

22. Sei

$$f(x, y) = 4(x + \frac{1}{2}y)^2 + 3x^2$$

(a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung von f.

23. Lösen sie die folgende Optimierungsaufgabe. (Gesucht sind alle globalen Extrema.)

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & e^{x^2+2x-15} \\ & -2 \le x \le 4 \end{array}$$

24. (a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch die Multiplikation $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}$.

25. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

(b) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar?

(c) Ist $\mathbf{A}$ singulär oder regulär?

(d) Hat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine eindeutig bestimmte Lösung?

26. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{X} - (\mathbf{A} + \mathbf{D})\mathbf{X} = \mathbf{E}.$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ quadratische Matrizen gleicher Größe sind.

27. Gegeben ist folgendes lineares Optimierungssystem

$$\begin{array}{lr} \text{Max} & x + y \\ \text{NB:} & x \le 6 \\ & y \le 3 \\ & \frac{1}{2}x + y \le 5 \\ & x, y \ge 0 \end{array}$$

Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

28. Bringen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 + x_4 \\ \text{NB:} & x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

auf Standardform.

Hinweis: Die Lösung des Optimierungsproblems mit dem Simplexalgorithmus ist nicht Teil der Aufgabenstellung.

29. Ein Unternehmen erzeugt zwei Produkte x_1, x_2 und verkauft diese zu einem Preis p_1 bzw. p_2. Von Produkt x_1 werden n_1, von Produkt x_2 n_2 Stück verkauft. Bei der Produktion fallen Produktionskosten y_1 bzw. y_2 (pro Stück) an. Stellen Sie den Gewinn G des Unternehmens als mathematische Funktion der oben angeführten Größen dar.

22. April 1997

30. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dx}{dy}$ der impliziten Funktion

$$xy + x^2 - y^2 = 1$$

31. Sei

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 3y^2 + x$$

(a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung von f (konkav/konvex).

(d) Gibt es globale Minima und Maxima? Welche?

32. Berechnen Sie alle stationären Punkte von

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 3y^2 + x$$

unter der Nebenbedingung

$$y - x = 1.$$

33. Lösen sie die folgende Optimierungsaufgabe. (Gesucht sind alle globalen Extrema.)

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & e^{\frac{1}{3}x^3 - x} \\ & -1 \leq x \leq 3 \end{array}$$

34. Bestimmen Sie, falls möglich, die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 8 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

(b) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar?

(c) Ist $\mathbf{A}$ singulär oder regulär?

(d) Hat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine eindeutig bestimmte Lösung?

36. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{B}\,\mathbf{X} = \mathbf{C}\,\mathbf{X} + \mathbf{I}$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{X}$ quadratische Matrizen gleicher Größe sind.

37. Gegeben ist folgendes lineares Optimierungssystem

$$\begin{array}{lr} \text{Max} & 2x + y \\ \text{NB:} & x \leq 10 \\ & y \leq 2 \\ & 3x + 15y \leq 45 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

(b) Lösen Sie das Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

38. (a) Berechnen Sie die Elastizität von $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x}$.

(b) Ist f an der Stelle $x = -2$ elastisch?

25. Februar 1997

39. Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_2}$ der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \sin(x_1) + x_2^3 x_3$$

40. Ein Unternehmen stellt drei Produkte, A, B und C her. Die Stückkosten für die Herstellung sind 17 (A), 19 (B) und 22 (C) Geldeinheiten, die entsprechenden Verkaufspreise 28 (A), 25 (B) und 30 (C) Geldeinheiten. Alle nachfolgenden Angaben beziehen sich auf den Planungshorizont der nächsten sechs Monate. Die am Markt maximal absetzbare Stückzahl des Produkts A in dieser Zeit ist 2000 Einheiten. Aufgrund einer vertraglichen Verpflichtung müssen 1000 Einheiten des Produkts B und 1800 Einheiten des Produkts C gefertigt werden. Ein weitergehender Absatz von B ist nicht möglich, bei C kann über diese Minimalmenge hinaus noch mit einem Absatz von bis zu 4000 Einheiten am Markt gerechnet werden.

Die drei Produkte durchlaufen zwei Produktionsphasen. Die benötigte Anzahl von Maschinenstunden für die Herstellung einer Einheit jedes der drei Produkte in jeder der beiden Produktionsphasen ist in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

	Phase 1	Phase 2
A	0,6	0,7
B	0,8	1,1
C	0,9	0,5

In Produktionsphase 1 stehen maximal 3400 Maschinenstunden, in Phase 2 3000 Maschinenstunden zur Verfügung.

(a) Geben Sie Zielfunktion und sämtliche Nebenbedingungen des linearen Optimierungproblems an, mit dem der Produktionsplan des Unternehmens (die herzustellende Stückzahl von A,B und C), der den Gewinn maximiert berechnet werden kann.

(b) Transformieren Sie das lineare Optimierungsproblem in die Standardform.

Hinweis: Die Lösung des Optimierungsproblems mit dem Simplexalgorithmus ist nicht Teil der Aufgabenstellung.

41. Bestimmen Sie, falls möglich, die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 - x_1^4$$

im Punkt $(1, 2)$.

43. Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{5}{3} & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

44. (a) Bestimmen Sie ein lokales Minimum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 3)^4, \qquad -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty$$

Zeigen Sie die Minimumseigenschaft mit Hilfe der Hessematrix.

(b) Hat die Funktion im gesamten Definitionsbereich ein einheitliches Krümmungsverhalten? Untersuchen Sie diese Frage ebenfalls mit der Hessematrix und geben Sie an, ob es sich beim zuvor gefundenen Minimum um ein globales Minimum handelt.

45. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 \\ -5 & 26 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

46. Bestimmen Sie die Kofaktorenmatrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

47. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ quadratische Matrizen gleicher Größe wie $\mathbf{X}$ sind.

48. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 2)^2$$

unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 1$ mit Hilfe von Lagrangemultiplikatoren.

28. Jänner 1997

49. Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion

$$e^{x-2y+xy} = 1$$

50. Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion $f(x) = xe^{-x}$ elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch ist.

51. Bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 4}$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$.

52. Berechnen Sie die Lösung(en) des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

53. (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 18 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Determinate von $\mathbf{A}$, indem Sie die Rechenregeln über Zeilen- und Spaltentransformationen anwenden.

54. (a) Bestimmen Sie stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_2x_3 + e^{x_3}$$

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich bei diesen Punkten um Maxima oder Minima handelt.

55. Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

56. Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem für $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$g(x, y) = x - 2y - 1$$

20. November 1996

57. Gegeben sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & -7 & 11 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\mathbf{A}$.

(b) Wieviele Lösungen besitzt das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

(c) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

(d) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? (Begründung)

(e) Sind die Zeilenvektoren untereinander linear unabhängig?

58. Lösen Sie die Matrizengleichung nach $\mathbf{X}$ auf

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C}$$

59. Berechnen Sie $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}$ aus der impliziten Funktion

$$\ln \ (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + e^{x_3} + 1 = 0$$

60. (a) Bestimmen Sie die Elastizität von

$$f(x) = e^{-4x \ + \ 5}$$

(b) Bestimmen Sie die Bereiche in denen $f(x)$ elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch ist.

61. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\text{Max/Min} \quad f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 10$$

im Definitionsbereich

$$D = \{x| - 6 \leq x \leq 2\}$$

62. (a) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Determiante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

63. (a) Bestimmen Sie stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 3$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 16$$

mittels Lagrange-Multiplikatoren.

(b) Handelt es sich um einen globalen Extremwert?

64. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1} + e^{x_3^2}$$

65.

$$\begin{array}{lrcl} & \text{Min/Max} & & 3x_1 + x_2 \\ \text{NB:} & 2x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalogorithmus.

(b) Lösen Sie das Problem graphisch (Min,Max).

(c) Zeichnen Sie die neue Lösung (Min, Max) ein, wenn zusätzlich noch die Nebenbedingung $x_1 = 4$ eingeführt wird.

66. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$2x_1 + 4x_2 = 9$$

$$4x_1 + 8x_2 = 15$$

1. Oktober 1996

67. (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Welchen Rang hat die Matrix?

68. (a) Bestimmen Sie die Elastizität von

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

(b) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen $f(x)$ elastisch bzw. unelastisch ist.

69. (a) Bestimmen Sie die Inverse zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Prüfen sie mittels Multiplikation von $\mathbf{A}^{-1}$ mit $\mathbf{A}$, ob Sie $\mathbf{A}^{-1}$ richtig berechnet haben.

70. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x + y^2)e^{-x}$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

71. Bestimmen Sie die Lösung x des folgenden Gleichungssystems

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

72. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)}$$

Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Extremwerte und zeichnen Sie ein Skizze.

73. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x) = x^2 y$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = \frac{1}{2}$$

mit Lagrangemultiplikatoren.

74. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion

$$\ln(x^2 + y^2) = 1$$

75. Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\max \quad z = x + y$$

$$\begin{aligned} x &\le 6 \\ y &\le 8 \\ 2x + y &\le 14 \\ x + y &\le 10 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung graphisch.

(b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

26. Juni 1996

76. Berechnen Sie $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$ aus der impliziten Funktion

$$2x_2^2 + \ln(x_3^2 + x_1^2) - e^{x_2} = 0$$

77. (a) Bestimmen Sie die Elastizität von

$$f(x) = e^{3x} \cdot 3x$$

(b) Bestimmen Sie die Bereiche in denen $f(x)$ elastisch, unelastisch oder 1-elastisch ist.

78. Gegeben ist die Matrizengleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X} = -\mathbf{B}\,\mathbf{X} + \mathbf{C}$$

(a) Lösen Sie die Gleichung nach $\mathbf{X}$ auf.

(b) Welche Beschränkungen müssen für die Zeilenzahl und Spaltenzahl von $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{X}$ gelten damit die Matrizenmultiplikation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X}$ durchgeführt werden kann.

79. Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

(c) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar?

(d) Wieviele Lösungen hat das Gleichungssystem?

80. (a) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

81. (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 4$$

mittels Lagrange-Multiplikatoren.

(b) Handelt es sich hierbei um einen globalen Extremwert?

82. Lösen Sie das Optimierungsproblem
Max /Min $f(x) = 4|x+1| - x^2$
Definitionsbereich $D = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$

83.

$$\begin{array}{llcl} & \text{Min/Max} & & 4x_1 + 2x_2 \\ \text{NB:} & x_1 + x_2 & \leq & 9 \\ & x_1 & \leq & 7 \\ & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

(b) Lösen Sie das Problem graphisch (Min, Max).

(c) Zeichnen Sie die neue Lösung (Min, Max) ein, wenn zusätzlich noch die Nebenbedingung $x_1 = 4$ eingeführt wird.

84.

$$f(x) = 6e^{-x_1 + x_2}$$

Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten der obigen Funktion (konvex, konkav, weder-noch).

19. Februar 1996

85. Gegeben ist die Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$$

(a) Geben Sie an, welche Beschränkungen es für die Zeilenzahl, Spaltenzahl und Inventierbarkeit von **A**, **B** und **X** gibt, so daß die Rechenoperationen in der Gleichung definiert sind und die Gleichung nach **X** lösbar ist.

(b) Lösen Sie die Gleichung nach **X** auf.

86. Berechnen Sie mit dem Simplexalorithmus.

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & 2x + 3y \\ \text{NB:} & 2x + y \leq 10 \\ & x + 2y \leq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

87. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = \tfrac{1}{3}(x + 2)^3 + (y - 1)^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x - y = -1$$

88. Bestimmen Sie $\dfrac{\partial x_2}{\partial x_4}$ aus der impliziten Funktion:

$$x_3^3 + x_2 \cdot x_4 + \exp(x_1^2 + x_4^2) = 0$$

89. Sei

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

(c) Ist f in $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$
konvex, konkav oder keines von beiden? (Begründung)

(d) Was können Sie über die globalen Extremwerte von f in D sagen?

90. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

(b) Berechnen Sie den Rang von **A**.

(c) Sind die Zeilenvektoren von **A** linear unabhängig? (Begründung)

(d) Ist **A** inventierbar? (Begründung)

(e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(f) Berechnen Sie die inverse Matrix von $\mathbf{A}$.

91. (a) Berechnen Sie die Elastizität von

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1$$

(b) In welchen Punkten ist f 1-elastisch.

(c) In welchem Bereich ist f elastisch.

92. (a) Berechnen Sie das Differential der Funktion

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 5x - 1$$

an der Stelle $x = 0$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Differentials and der Stelle $x = 0$ ein Näherungswert für den Funktionswert von f in den Punkten 0,1 und 0,2.

25. Jänner 1996

93. Bestimmen Sie die Hessematrix der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + 2)^2 + \frac{7x_2}{x_3}$$

94. Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse zu $\mathbf{A}$.

(b) Geben Sie an, wie **genau ein** Element der Matrix verändert werden kann, so daß $\mathbf{A}$ nicht mehr invertierbar ist.

95. Gegeben ist die Matrixgleichung

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{B})^{-1}$$

(a) Geben Sie an, welche Beschränkungen es für die Zeilenanzahl, Spaltenanzahl und Invertierbarkeit von $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{X}$ gibt, so daß die Rechenoperationen in der Gleichung definiert sind und die Gleichung nach $\mathbf{X}$ lösbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung nach $\mathbf{X}$.

96.

1. Bestimmen Sie den/die stationären Punkt(e) von

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y^2+4)^2$$

2. Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.
3. Stellen Sie fest, ob eventuelle Optima global sind.

97. Bestimmen Sie $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ aus der impliziten Funktion

$$\ln(x_1 x_3 - x_2 x_4) + e^{x_2 x_4} = 0$$

98. Berechnen Sie $\mathbf{x}$ aus $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

99. Bestimmen Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Vektorenmenge

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

100. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1 - 3)^3 + x_2 x_3$$

unter den Nebendingungen

$$x_1 + x_2 = 4 \qquad x_1 + x_3 = 5$$

mit Langrangemultiplikatoren.

101. Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rcl} \text{Max} & & x + 3y \\ x + y & \leq & 10 \\ x + 2y & \leq & 12 \\ y & \leq & 5 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

graphisch. Geben Sie die Koordinaten des optimalen Punkts und den Wert der Zielfunktion im Optimum an.

102. Lösen Sie das Optimierungsproblem aus dem vorangegangenen Beispiel mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

14. November 1995

103. 1. Invertieren Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Überprüfen Sie durch die Multiplikation von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ oder $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$, ob die Inverse richtig berechnet wurde.

104. 1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Es sei $\mathbf{B}$ eine (5×5)-Matrix mit $\det(\mathbf{B}) = 2$.
Berechnen Sie die $\det(\mathbf{B}^{-1})$ und die $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

105. 1. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1}(x_2^2 + 3x_3^2) + x_1^2.$$

2. Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

106. Bestimmen Sie die Lösung(en) der Gleichungssysteme

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

107. (a) Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x) = e^{-2x}x^2$

(b) Wo ist $f(x)$ elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch ?

108.

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{NB:} \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie das lieare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

(b) Lösen Sie das Problem graphisch. (Minimum und Maximum sollen eingezeichnet werden)

(c) Wie ändert sich die Lösung, wenn die Zusatzbedingung $x_1 \geq 2$ eingeführt wird. (Minimum und Maximum sollen eingezeichnet werden.)

109. (a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion für $f(x, y) = xy + 4x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung: $x + y = 12$ und berechnen Sie alle stationären Punkte.

(b) Stellen Sie fest, ob es sich bei den stationären Punkten um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

110. (a) Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ in der impliziten Funktion

$$yx^2 + 3z - 4yz^2 = 0$$

(x, y, z sind die Variablen)

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch Umformung auf die explizite Funktion $y = ...$ und Bildung der partiellen Ableitung (y_x).

5. Oktober 1995

111. (a) Bestimmen Sie die Lösung(en) des Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Welchen Rang hat die Matrix $\mathbf{A}$?

112. Suchen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = (2x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 1$$

mittels Lagrange-Multiplikatoren.

113. (a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von $\mathbf{A}'$.

114. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y + y$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

115. (a) Berechnen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie, ob Sie A^{-1} richtig berechnet haben.

116. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{(x-1)^2}$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x)$.
Skizzieren Sie die Funktion und bestimmen Sie anhand der Zeichnung und anderen Überlegungen, ob die Funktion überall stetig und differenzierbar ist. Wenn nicht, geben Sie die Stellen an, an denen die Funktion nicht stetig und/oder differenzierbar ist.

117. Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion

$$e^{(x^2 - y^2)} = 1$$

118. Eine Firma will Inserate schalten, und hat dabei zwei Zeitschriften 1 und 2 zur Auswahl.

Ein solches Inserat wird in Zeitschrift 1 von 100 Personen, in Zeitschrift 2 von 200 Personen gelesen. Die Firma will, daß ihre Inserate möglichst oft gelesen werden, das heißt also, sie will die Anzahl der Leser der Inserate maximieren. Dabei gelten aber folgende Beschränkungen:

(1) Die Firma kann insgesamt nur 20 Inserate schalten.

(2) Die Firma hat ein Budget von 30 000 ATS. Ein Inserat in Zeitschrift 1 kostet 1000 ATS, in Zeitung 2 dagegen 3000 ATS.

(3) Die Firma muß in Zeitung 1 mindestens 2 Inserate schalten (weil der Redakteur ein Freund vom Besitzer ist).

(a) Schreiben Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem an und lösen Sie es graphisch.

(b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus. (Streichen Sie dabei die Nebenbedinung (3).)

119. Bestimmen Sie die Elastizität der Funktion.

$$f(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a}$$

(a) Berechnen Sie die Elastizität der Funktion.

(b) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion elastisch bzw. unelastisch ist.

28. Juni 1995

120. Suchen Sie das globale Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = |x \cdot \ln x| \qquad \text{NB:} \quad \begin{array}{l} x \geq 0{,}1 \\ x \leq 1{,}2 \end{array}$$

121.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(a) Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x)$.

(b) Wo ist $f(x)$ elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch?

122. (a) Berechnen Sie die Determinate von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Ist das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar?

(c) Berechnen Sie (mit Hilfe des Ergebnisses von (a)) die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Sind die Spaltenvektoren der in (a) angegeben Matrix linear unabhängig?

123. Suchen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y, z) = xy^2 + z$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y + z = 1$$

mittels Lagrangemultiplikatoren.

124. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_1 - x_2$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

(c) Können Sie Aussagen (mit Begründung!) über ein globales Minimum bzw. Maximum machen?

125. (a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung(en) des Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Berechnen Sie den Rang von $\mathbf{A}$.

126. (a) Invertieren Sie die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Überprüfen Sie, ob Sie $\mathbf{A}^{-1}$ richtig berechnet haben.

127.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & \multicolumn{3}{l}{z = x_1 + 2x_2} \\ \text{NB:} & 2x_1 & \leq & 20 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 20 \\ & x_2 & \leq & 15 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

(b) Lösen Sie das Problem graphisch. Bezeichnen Sie die Eckpunkte, die den mit dem Simplexalgorithmus erstellten Tableaus entsprechen. (T_1 für das Starttableau, T_2 für das nächste Tableau u.s.w.)

2. Mai 1995

128. (a) Invertieren Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie, ob Sie die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ richtig berechnet haben?

(c) Welchen Rang hat $\mathbf{A}$?

129.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

(b) Ist das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar?

Verwenden Sie als Begründung das Resultat von (a).

130.

$$f(x, y) = x^4 - x^2y - 1{,}5x^2 + y^2$$

(a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von $f(x, y)$.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

131. Bestimmen Sie die Lösung(en) des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

132. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie (wenn möglich) die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

(b) Wie groß ist der Rang von $\mathbf{A}$?

133. $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

(a) Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen $f(x)$ elastisch, unelastisch oder 1-elastisch ist.

134.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Skizieren Sie $f(x)$ und stellen Sie mit Hilfe der Zeichnung (oder mit anderen Überlegungen) fest, ob die Funktion überall stetig und überall differenzierbar ist. Wenn nicht, geben Sie die Stellen an, an denen die Funktion nicht stetig und/oder nicht differenzierbar ist.

135. Suchen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = x^2 \cdot y$$

unter der Nebenbedingung

$$y + x = 1$$

136. Bestimmen Sie Minimum und Maximum des linearen Optimierungsproblems mit der graphischen Methode.
Min/Max $\quad z = 2x_1 + x_2$
NB: $\quad x_1 + x_2 \geq 5$
$\qquad\qquad x_2 \geq x_1$
$\qquad\qquad x_2 \leq 4$

137. Eine Firma produziert 2 Produkte x_1 und x_2.
Eine Tonne von Produkt 1 hat einen Preis von 1000, eine Tonne von Produkt 2 hat einen Preis von 1500 Geldeinheiten.
Maschine A ist 8 Stunden in Betrieb und wird für eine Tonne von Produkt 1 und eine Tonne von Produkt 2 jeweils eine Stunde benötigt.
Maschine B ist täglich 10 Stunden in Betrieb und wird für 1 Tonne von Produkt 1 eine Stunde, für 1 Tonne von Produkt 2 eineinhalb Stunden benötigt.
Eine strategische Enscheidung der Firmenleitung besagt, daß von Produkt 2 höchstens gleich viel wie von Produkt 1 produziert werden darf.
Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem, mit dem der Umsatz maximiert werden kann.

Lösungen

1. (a) Rang($\mathbf{A}$) = Rang($\mathbf{E}$) = 2 > Anzahl der Variablen ⇒ unendlich viele Lösungen. (b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (d) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$.
2. $\varepsilon_f(x) = 2x^2$, 1-elastisch in $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $-\sqrt{\frac{1}{2}}$; elastisch in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$, unelastisch in $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$.
3. stationärer Punkt in $\mathbf{x}_0 = (2, 2)$.
4. globales Maximum in -4, globales Minimum in 4.
5. $f(x) = e^{-2x} + 4$.
6. (a) stationärer Punkt in $\mathbf{x}_0 = (-\ln 5, \ln 2)$, (b) $\mathbf{x}_0$ ist lokales Minimum.
7. (a) Minimum in $(0, 0)$, Maximum in $(7, 1)$, (b) zulässiger Bereich leer, keine Lösung
8. $\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -1$.
9. (a) $\det(\mathbf{A}) = -20$, (b) $\det(\mathbf{B}) = 20$ (1. und 3. Spalte vertauscht), (c) $\det(\mathbf{C}) = -40$ (2. Zeile mit 2 multipliziert).
10. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$
11. $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}$
12. $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{1+e^{x+y}}{2x+e^{x+y}}$
13. $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$
14. (a) Die Isonutzenlinie fällt mit der Begrenzungsgerade zusammen. (b) Die Zeilfunktion hängt im Endtableau nicht von allen „Nichtbasisvariablen“ ab: der entsprechende Eintrag in der Zielfunktionszeile ist 0, obwohl die Variable gleich 0 gesetzt wurde; ein nochmaliger Pivotschritt — mit dieser Spalte als Pivotspalte — läßt die Zielfunktionszeile unverändert, ergibt aber eine andere (maximale) zulässige Basislösung.

15. Minimum in $(0,0)$.

16. Funktion ist überall konvex (Hessematrix bzw. Minoren).

17. Rang 3

18. $|\mathbf{A}^*_{1,1}| = 2$, $|\mathbf{A}^*_{1,2}| = -2$, $|\mathbf{A}^*_{2,1}| = -4$, $|\mathbf{A}^*_{2,2}| = 1$.

19. $df = (\frac{1}{x_1} + 2\,(x_1 - x_2))\, f_{x_1} - 2\,(x_1 - x_2)\, f_{x_2}$.

21. (a) $\frac{df}{dx} = e^{a\,x^2+b}\,(2\,a\,x)$, (b) $\frac{df}{dx} = \cos(x)\,\ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$, (c) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\,x - 3\,y}{3\,y^2 + 3\,x}$.

22. (a) stationärer Punkt in $(0,0)$, (b) lokales Minimum (alle Hauptminoren > 0), (c) konvex.

23. globales Maximum in $x_1 = 4$, globales Minimum in $x_2 = -1$.

24. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

25. (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (b) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$, (c) singulär, (d) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$.

26. $\mathbf{X} = (\mathbf{A}\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} + \mathbf{D}))^{-1}\,\mathbf{E}$.

27. Maximum in $(6,2)$.

28. $x_4 = x_4' - x_4''$,

$$\begin{array}{ll} \max & z = 4\,x_1 - 2\,x^2 + 9\,x_3 + x_4' - x_4'' \\ \text{NB:} & \hfill x_1 + 3\,x_2 - s_1 = 4 \\ & \hfill x_1 + x_4' - x_4'' + s_2 = 3 \\ & \hfill x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'', s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

29. $G = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 - y_1 \cdot n_1 - y_2 \cdot n_2$.

30. $\frac{dx}{dy} = -\frac{x - 2\,y}{2\,x + y}$.

31. (a) stationärer Punkt $\mathbf{x}_0 = (-3,1)$, (b) $\mathbf{x}_0$ ist ein lokales Minimum (alle Hauptminoren > 0), (c) f ist konvex (alle Hauptminoren *für alle* $\mathbf{x} > 0$), (d) $\mathbf{x}_0$ ist globales Minimum, kein globales Maximum.

32. stationärer Punkt in $(-\frac{9}{11}, \frac{2}{11})$.

33. globales Maximum in $x_1 = 1$, globales Minimum in $x_2 = 3$.

34. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

35. (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (b) $\mathbf{A}$ ist nicht invertierbar, da $\det(\mathbf{A}) = 0$, (c) $\mathbf{A}$ ist singulär, (d) nein, da $\mathbf{A}$ nicht regulär.

36. $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$.

37. optimale zulässige Basislösung: $x = 10$, $y = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$. Maximum in $(10,1)$, $z_{max} = 21$.

38. (a) $\varepsilon_f(x) = x^3 - x$, (b) f is an der Stelle -2 elastisch.

39. $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_2} = 6\,x_2$.

40. (a) x_1, x_2, x_3 … Menge der Produkte A, B bzw. C. Zielfunktion: $z = 11\,x_1 + 6\,x_2 + 8\,x_3 \to \max$, Nebenbedingungen: $x_1 \leq 2000$, $x_2 = 1000$, $x_3 \geq 1800$, $x_3 \leq 5800$, $0{,}6\,x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}9\,x_3 \leq 3400$, $0{,}7\,x_1 + 1{,}1\,x_2 + 0{,}5\,x_3 \leq 3000$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
(b) Standardform: $z = 11\,x_1 + 6\,x_2 + 8\,x_3$, $x_1 + x_4 = 2000$, $x_2 = 1000$, $x_3 - x_5 = 1800$, $x_3 + x_6 = 5800$, $0{,}6\,x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}9\,x_3 + x_7 = 3400$, $0{,}7\,x_1 + 1{,}1\,x_2 + 0{,}5\,x_3 + x_8 = 3000$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$.

41. nicht inverierbar.

42. $\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

43. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1$

44. (a) stationärer Punk in $(0,3)$, (b) alle Hauptminoren sind $\geq 0 \Rightarrow$ f is im gesamten Definitionsbereich konvex $\Rightarrow$ stationärer Punkt ist globales Minimum.

45. Rang 4.

46. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

47. $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}^{-1}$.

48. stationärer Punkt: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 3$.

49. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1+y}{2-x}$.

50. elastisch in $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, unelastisch in $(0,2)$, 1-elastisch für $x = 0$ und $x = 2$.

51. Maximum in $x = 0$, Minimum in $x = 1$ und $x = -1$.

52. das Gleichungssystem ist inkonsistent. daher existiert keine Lösung.

53. (a) -24, (b) $\det(\mathbf{B}) = 2 \cdot \det(\mathbf{A}) = -48$.

54. (a) stationärer Punkt: $(1, -1, 0)$, (b) Sattelpunkt.

55. $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3}{4}$, $z_{\max} = 4$. Das Maximum ist eindeutig bestimmt.

56. stationärer Punkt: $(-1, -1)$, $\lambda = 0$.

57. (a) $\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 2$, (b) $\operatorname{rg}(\mathbf{E}) = 3 \neq \operatorname{rg}(\mathbf{A})$, inkonsistent, keine Lösung, (c) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (d) nicht invertierbar, da $\det(\mathbf{A}) = 0$, (e) linear abhängig, da $\det(\mathbf{A}) = 0$.

58. $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}$.

59. $\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -1$.

60. (a) $\varepsilon_f(x) = -4x$, (b) elastisch in $(-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$, unelastisch in $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, 1-elastisch für $x = -\frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{4}$.

61. globales Maximum in $x = 2$, globales Minimum in $x = -1$.

62. (a) 16, (b) 32, (c) 16.

63. (a) stationärer Punkt: $(12, 4)$, $\lambda = 28$, (b) globales Minimum.

64. stationärer Punkt: $(-1, 0, 0)$.

65. (a) min: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 10$, $x_4 = 4$, $z_{\min} = 0$; max: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $z_{\max} = 15$.

66. inkonsistentes Gleichungssystem, keine Lösung.

67. (a) $\det(\mathbf{A}) = 6$, (b) $\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 4$.

68. (a) $\varepsilon_f(x) = 2-x$, (b) elastisch in $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, unelastisch in $(1, 3)$, 1-elastisch in $x = 1$ und $x = 3$.

69. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

70. (a) stationärer Punkt: $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, (b) Sattelpunkt.

71. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

72. Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, Nullstelle in $x = 0$, lokales Maximum in $x = 1$, lokales Minimum in $x = -1$.

73. stationärer Punkt: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $\lambda = \frac{1}{9}$.

74. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$.

75. (b) Optimum nicht eindeutig. zwei zulässige Basislösungen des Tableaus: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ und $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, $x_6 = 0$.

76. $\frac{\partial x_1}{\partial x_3} = -\frac{x_3}{x_1}$.

77. (a) $3x + 1$, (b) elastisch in $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$, unelastisch in $(-\frac{2}{3}, 0)$, 1-elastisch für $x = -\frac{2}{3}$ und $x = 0$.

78. (a) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{C}$, (b) Zeilenzahl von $\mathbf{A}$ = Spaltenzahl von $\mathbf{A}$ = Zeilenzahl von $\mathbf{X}$.

79. (a) $\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 2$, (b) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (c) $\mathbf{A}$ ist nicht invertierbar, (d) $\operatorname{rg}(\mathbf{E}) = 3 \neq \operatorname{rg}(\mathbf{A})$, keine Lösung.

80. (a) 26, (b) −26, (c) 26.

81. (a) stationärer Punkt: $(1, 3)$, $\lambda = 6$, (b) globales Minimum.

82. globales Maximum in $x = 2$, globale Minima in $x = -3$ und $x = -1$.

83. (a) min: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 9$, $x_4 = 7$, $x_5 = 5$, $z_{\min} = 0$; max: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $z_{\max} = 32$.

84. f ist konvex.

85. (a) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{X}$ müssen quadratisch mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl sein, $\mathbf{A}$ muß invertiertbar sein, (b) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

86. min: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 10$, $x_4 = 10$, $z_{\min} = 0$; max: $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $z_{\max} = \frac{50}{3}$.

87. stationäre Punkte: $(-3 - \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5})$ und $(-3 + \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5})$.

88. $\frac{\partial x_2}{\partial x_4} = -\frac{x_2 + 2\,x_4\,\exp(x_1^2 + x_4^2)}{x_4}$.

89. (a) stationärer Punkt: $(0, 0)$, (b) lokales Maximum, (c) f ist in D konvex, (d) $(0, 0)$ ist ein globales Maximum.

90. (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (b) $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$, (c) linear abhängig, da $\det(\mathbf{A}) = 0$ bzw. da $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) < 3$, (d) nicht invertierbar, da $\det(\mathbf{A}) = 0$,
(e) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (f) $\mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht (wegen (d)).

91. (a) $\varepsilon_f(x) = \frac{8x^2+3x}{4x^2+3x+1}$, (b) elastisch in $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

92. (a) $df = 5\,dx$, (b) $f(0{,}1) \approx -0{,}5$, $f(0{,}2) \approx 0$.

93. $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 2{x_2}^2 & 4\,x_1x_2 + 4 & 0 \\ 4\,x_1x_2 + 4 & 2{x_1}^2 & -\frac{7}{{x_3}^2} \\ 0 & -\frac{7}{{x_3}^2} & \frac{14\,x_2}{{x_3}^3} \end{pmatrix}$.

94. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) z.B. -5 auf -6 in der dritten Zeile.

95. (a) $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ quadratisch, invertierbar und gleich groß, $\mathbf{C}$ quadratisch und gleich groß wie $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, (b) $\mathbf{X} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

96. (a) Stationärer Punkt in $(1, 0)$, (b) lokales Minimum, (c) f ist überall konvex, $(1, 0)$ ein globales Minimum.

97. $\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\frac{x_3}{x_1}$.

98. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}$.

99. 2, kann aus dem Rang der entsprechenden Matrix ermittelt werden.

100. $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5, \lambda_1 = -5, \lambda_2 = -4$ und $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$.

101. $x = 2, y = 5$, Zielfunktion: 17.

102. $x = 2, y = 5$, Zielfunktion: 17.

103. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

104. (a) $\det(\mathbf{A}) = 90$, (b) $\det(\mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{B})} = \frac{1}{2}$, $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = 180$.

105. (a) stationärer Punkt: $(0, 0, 0)$, (b) lokales Minimum.

106. (a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) inkonsistentes Gleichungssystem, keine Lösung.

107. (a) $\varepsilon_f(x) = 2 - 2x$, (b) elastisch in $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, unelastisch in $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, 1-elastisch in $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$.

108. (a) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. $x_4 = 0$,. $x_5 = 0$, (c) der zulässige Bereich bleibt unverändert, die Lösung ändert sich daher nicht.

109. (a) stationärer Punkt: $(1{,}5; 10{,}5)$, $\lambda = 22{,}5$, (b) (globales) Minimum.

110. (a) $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2xy}{x^2-4z^2}$, (b) $y(x, z) = -\frac{3z}{x^2-4z^2}$.

111. (a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$.

112. stationärer Punkt: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\lambda = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

113. (a) $\det(\mathbf{A}) = -6$, (b) $\det(\mathbf{A}') = -6$.

114. (a) stationärer Punkte: $P_1 = (1, \frac{3}{2})$ und $P_2 = (-1, -\frac{3}{2})$, (b) P_1 und P_2 sind Sattelpunkte.

115. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

116. Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, stetig in D, differenzierbar in $D \setminus \{0\}$.

117. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{y}$.

118. (a) x ... Inserate in Zeitung 1, y ... Inserate in Zeitung 2, z ... Leser der Inserate. max $z = 100x + 200y$, NB: $x + y \leq 0$, $x + 3y \leq 30$, $x \geq 2$, $x, y \geq 0$. Lösung: $x = 15$, $y = 5$, $z_{\max} = 2500$; (b) $x_1 = 15$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $z_{\max} = 2500$.

119. (a) $\varepsilon_f(x) = 1 - a$, $a \neq 0$, (b) die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich elastisch, unelastisch oder 1-elastisch, abhängig von a; elastisch für $a < 0$ oder $a > 2$, unelastisch für $0 < a < 2$, 1-elastisch für $a = 0$ und $a = 2$.

120. globales Maximum in $x = \frac{1}{e}$, globales Minimum in $x = 1$.

121. (a) $\varepsilon_f(x) = -\frac{2x^2}{1+x^2}$, (b) elastisch in $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, unelatisch in $(-1, 1)$, 1-elastisch in $x = -1$ und $x = 1$.

122. (a) 6, (b) eindeutig lösbar, (c) 12, (d) linear unabhängig, da $\det \neq 0$.

123. stationäre Punkte: $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$, $\lambda = 1$ und $(-\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{2})$, $\lambda = 1$.

124. (a) stationärer Punkt: $(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$, (b) lokales Minimum, (c) $(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$ ist globales Minimum, kein Maximum.

125. (a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (b) $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$.

126. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

127. (a) $x_1 = 5$, $x_2 = 15$, $x_3 = 10$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $z_{\max} = 35$.

128. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, (c) $\text{rg}(A) = 3$.

129. (a) -16, (b) ja, da $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

130. (a) stationäre Punkte: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \frac{1}{2})$, $P_3 = (-1, \frac{1}{2})$, (b) P_1 ist Sattelpunkt, P_2 und P_3 sind lokale Minima.

131. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

132. (a) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 1$.

133. (a) $\varepsilon_f(x) = 1 - 2x^2$, (b) elastisch für $|x| > 1$, unelastisch für $|x| < 1$, 1-elastisch für $x = -1$ und $x = 1$.

134. f ist überall stetig (da keine Sprungstelle in Graph), f ist differenzierbar außer in $x = 1$ (Knick im Graph).

135. stationäre Punkte: $(0, 1)$, $\lambda = 0$ und $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\lambda = -\frac{4}{9}$.

136. min: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $z_{\min} = 6$, max: $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $z_{\max} = 12$.

137. x_1 ... Tonnen Produkt 1, x_2 ... Tonnen Produkt 2, z ... Umsatz. $\max z = 1000\,x_1 + 1500\,x_2$, NB: $x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1 + \frac{3}{2} \leq 10$, $-x_1 + x_2 \leq 0$, $x_1, x_2 \geq 0$.