2. Mai 1995

128. (a) Invertieren Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie, ob Sie die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ richtig berechnet haben?

(c) Welchen Rang hat $\mathbf{A}$?

129.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

(b) Ist das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar?

Verwenden Sie als Begründung das Resultat von (a).

130.

$$f(x, y) = x^4 - x^2 y - 1{,}5x^2 + y^2$$

(a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von $f(x, y)$.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

131. Bestimmen Sie die Lösung(en) des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

132. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie (wenn möglich) die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

(b) Wie groß ist der Rang von $\mathbf{A}$?

133. $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

(a) Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen $f(x)$ elastisch, unelastisch oder 1-elastisch ist.

134.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Skizieren Sie $f(x)$ und stellen Sie mit Hilfe der Zeichnung (oder mit anderen Überlegungen) fest, ob die Funktion überall stetig und überall differenzierbar ist. Wenn nicht, geben Sie die Stellen an, an denen die Funktion nicht stetig und/oder nicht differenzierbar ist.

135. Suchen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x,y) = x^2 \cdot y$$

unter der Nebenbedingung

$$y + x = 1$$

136. Bestimmen Sie Minimum und Maximum des linearen Optimierungsproblems mit der graphischen Methode.
Min/Max $\quad z = 2x_1 + x_2$
NB: $\quad x_1 + x_2 \geq 5$
$\qquad\quad x_2 \geq x_1$
$\qquad\quad x_2 \leq 4$

137. Eine Firma produziert 2 Produkte x_1 und x_2.
Eine Tonne von Produkt 1 hat einen Preis von 1000, eine Tonne von Produkt 2 hat einen Preis von 1500 Geldeinheiten.
Maschine A ist 8 Stunden in Betrieb und wird für eine Tonne von Produkt 1 und eine Tonne von Produkt 2 jeweils eine Stunde benötigt.
Maschine B ist täglich 10 Stunden in Betrieb und wird für 1 Tonne von Produkt 1 eine Stunde, für 1 Tonne von Produkt 2 eineinhalb Stunden benötigt.
Eine strategische Enscheidung der Firmenleitung besagt, daß von Produkt 2 höchstens gleich viel wie von Produkt 1 produziert werden darf.
Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem, mit dem der Umsatz maximiert werden kann.

Lösungen

128. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, (c) $\text{rg}(A) = 3$.

129. (a) -16, (b) ja, da $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

130. (a) stationäre Punkte: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1, \frac{1}{2})$, $P_3 = (-1, \frac{1}{2})$, (b) P_1 ist Sattelpunkt, P_2 und P_3 sind lokale Minima.

131. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

132. (a) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\text{rg}(\mathbf{A}) = 1$.

133. (a) $\varepsilon_f(x) = 1 - 2x^2$, (b) elastisch für $|x| > 1$, unelastisch für $|x| < 1$, 1-elastisch für $x = -1$ und $x = 1$.

134. f ist überall stetig (da keine Sprungstelle in Graph), f ist differenzierbar außer in $x = 1$ (Knick im Graph).

135. stationäre Punkte: $(0,1)$, $\lambda = 0$ und $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\lambda = -\frac{4}{9}$.

136. min: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $z_{\min} = 6$, max: $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $z_{\max} = 12$.

137. x_1 ... Tonnen Produkt 1, x_2 ... Tonnen Produkt 2, z ... Umsatz. $\max z = 1000\,x_1 + 1500\,x_2$, NB: $x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1 + \frac{3}{2} \leq 10$, $-x_1 + x_2 \leq 0$, $x_1, x_2 \geq 0$.