5. Oktober 1995

111. (a) Bestimmen Sie die Lösung(en) des Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Welchen Rang hat die Matrix $\mathbf{A}$?

112. Suchen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = (2x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 1$$

mittels Lagrange-Multiplikatoren.

113. (a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von $\mathbf{A}'$.

114. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y + y$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

115. (a) Berechnen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie, ob Sie A^{-1} richtig berechnet haben.

116. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{(x-1)^2}$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x)$.
Skizzieren Sie die Funktion und bestimmen Sie anhand der Zeichnung und anderen Überlegungen, ob die Funktion überall stetig und differenzierbar ist. Wenn nicht, geben Sie die Stellen an, an denen die Funktion nicht stetig und/oder differenzierbar ist.

117. Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion

$$e^{(x^2 - y^2)} = 1$$

118. Eine Firma will Inserate schalten, und hat dabei zwei Zeitschriften 1 und 2 zur Auswahl.

Ein solches Inserat wird in Zeitschrift 1 von 100 Personen, in Zeitschrift 2 von 200 Personen gelesen. Die Firma will, daß ihre Inserate möglichst oft gelesen werden, das heißt also, sie will die Anzahl der Leser der Inserate maximieren. Dabei gelten aber folgende Beschränkungen:

(1) Die Firma kann insgesamt nur 20 Inserate schalten.

(2) Die Firma hat ein Budget von 30 000 ATS. Ein Inserat in Zeitschrift 1 kostet 1000 ATS, in Zeitung 2 dagegen 3000 ATS.

(3) Die Firma muß in Zeitung 1 mindestens 2 Inserate schalten (weil der Redakteur ein Freund vom Besitzer ist).

(a) Schreiben Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem an und lösen Sie es graphisch.

(b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus. (Streichen Sie dabei die Nebenbedinung (3).)

119. Bestimmen Sie die Elastizität der Funktion.

$$f(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a}$$

(a) Berechnen Sie die Elastizität der Funktion.

(b) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion elastisch bzw. unelastisch ist.

Lösungen

111. (a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$.

112. stationärer Punkt: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\lambda = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

113. (a) $\det(\mathbf{A}) = -6$, (b) $\det(\mathbf{A}') = -6$.

114. (a) stationärer Punkte: $P_1 = (1, \frac{3}{2})$ und $P_2 = (-1, -\frac{3}{2})$, (b) P_1 und P_2 sind Sattelpunkte.

115. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

116. Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, stetig in D, differenzierbar in $D \setminus \{0\}$.

117. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{y}$.

118. (a) x ... Inserate in Zeitung 1, y ... Inserate in Zeitung 2, z ... Leser der Inserate. max $z = 100x + 200y$, NB: $x + y \leq 0$, $x + 3y \leq 30$, $x \geq 2$, $x, y \geq 0$. Lösung: $x = 15$, $y = 5$, $z_{\max} = 2500$; (b) $x_1 = 15$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $z_{\max} = 2500$.

119. (a) $\varepsilon_f(x) = 1 - a$, $a \neq 0$, (b) die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich elastisch, unelastisch oder 1-elastisch, abhängig von a; elastisch für $a < 0$ oder $a > 2$, unelastisch für $0 < a < 2$, 1-elastisch für $a = 0$ und $a = 2$.