14. November 1995

103. 1. Invertieren Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Überprüfen Sie durch die Multiplikation von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ oder $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$, ob die Inverse richtig berechnet wurde.

104. 1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Es sei $\mathbf{B}$ eine (5×5)-Matrix mit $\det(\mathbf{B}) = 2$.
Berechnen Sie die $\det(\mathbf{B}^{-1})$ und die $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

105. 1. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1}(x_2^2 + 3x_3^2) + x_1^2.$$

2. Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

106. Bestimmen Sie die Lösung(en) der Gleichungssysteme

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

107. (a) Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x) = e^{-2x}x^2$

(b) Wo ist $f(x)$ elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch ?

108.

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{NB:} \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie das lieare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

(b) Lösen Sie das Problem graphisch. (Minimum und Maximum sollen eingezeichnet werden)

(c) Wie ändert sich die Lösung, wenn die Zusatzbedingung $x_1 \geq 2$ eingeführt wird. (Minimum und Maximum sollen eingezeichnet werden.)

109. (a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion für $f(x, y) = xy + 4x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung: $x + y = 12$ und berechnen Sie alle stationären Punkte.

(b) Stellen Sie fest, ob es sich bei den stationären Punkten um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

110. (a) Berechnen Sie $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ in der impliziten Funktion

$$yx^2 + 3z - 4yz^2 = 0$$

(x, y, z sind die Variablen)

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch Umformung auf die explizite Funktion $y = \ldots\ldots$ und Bildung der partiellen Ableitung (y_x).

Lösungen

103. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

104. (a) $\det(\mathbf{A}) = 90$, (b) $\det(\mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{B})} = \frac{1}{2}$, $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = 180$.

105. (a) stationärer Punkt: $(0, 0, 0)$, (b) lokales Minimum.

106. (a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) inkonsistentes Gleichungssystem, keine Lösung.

107. (a) $\varepsilon_f(x) = 2 - 2x$, (b) elastisch in $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, unelastisch in $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, 1-elastisch in $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$.

108. (a) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. $x_4 = 0$,. $x_5 = 0$, (c) der zulässige Bereich bleibt unverändert, die Lösung ändert sich daher nicht.

109. (a) stationärer Punkt: $(1{,}5; 10{,}5)$, $\lambda = 22{,}5$, (b) (globales) Minimum.

110. (a) $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2xy}{x^2 - 4z^2}$, (b) $y(x, z) = -\frac{3z}{x^2 - 4z^2}$.