25. Jänner 1996

93. Bestimmen Sie die Hessematrix der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + 2)^2 + \frac{7x_2}{x_3}$$

94. Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse zu $\mathbf{A}$.

(b) Geben Sie an, wie **genau ein** Element der Matrix verändert werden kann, so daß $\mathbf{A}$ nicht mehr invertierbar ist.

95. Gegeben ist die Matrixgleichung

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{B})^{-1}$$

(a) Geben Sie an, welche Beschränkungen es für die Zeilenanzahl, Spaltenanzahl und Invertierbarkeit von $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{X}$ gibt, so daß die Rechenoperationen in der Gleichung definiert sind und die Gleichung nach $\mathbf{X}$ lösbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung nach $\mathbf{X}$.

96.
1. Bestimmen Sie den/die stationären Punkt(e) von

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y^2+4)^2$$

2. Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.
3. Stellen Sie fest, ob eventuelle Optima global sind.

97. Bestimmen Sie $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ aus der impliziten Funktion

$$\ln(x_1 x_3 - x_2 x_4) + e^{x_2 x_4} = 0$$

98. Berechnen Sie $\mathbf{x}$ aus $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

99. Bestimmen Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Vektorenmenge

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

100. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1 - 3)^3 + x_2 x_3$$

unter den Nebendingungen

$$x_1 + x_2 = 4 \qquad x_1 + x_3 = 5$$

mit Langrangemultiplikatoren.

101. Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rcl} \text{Max} & & x + 3y \\ x + y & \leq & 10 \\ x + 2y & \leq & 12 \\ y & \leq & 5 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

graphisch. Geben Sie die Koordinaten des optimalen Punkts und den Wert der Zielfunktion im Optimum an.

102. Lösen Sie das Optimierungsproblem aus dem vorangegangenen Beispiel mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösungen

93. $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 2x_2{}^2 & 4x_1x_2 + 4 & 0 \\ 4x_1x_2 + 4 & 2x_1{}^2 & -\frac{7}{x_3{}^2} \\ 0 & -\frac{7}{x_3{}^2} & \frac{14\,x_2}{x_3{}^3} \end{pmatrix}$.

94. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) z.B. -5 auf -6 in der dritten Zeile.

95. (a) $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ quadratisch, invertierbar und gleich groß, $\mathbf{C}$ quadratisch und gleich groß wie $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, (b) $\mathbf{X} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

96. (a) Stationärer Punkt in $(1, 0)$, (b) lokales Minimum, (c) f ist überall konvex, $(1, 0)$ ein globales Minimum.

97. $\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\frac{x_3}{x_1}$.

98. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}$.

99. 2, kann aus dem Rang der entsprechenden Matrix ermittelt werden.

100. $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5, \lambda_1 = -5, \lambda_2 = -4$ und $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$.

101. $x = 2, y = 5$, Zielfunktion: 17.

102. $x = 2, y = 5$, Zielfunktion: 17.