

19. Februar 1996

85. Gegeben ist die Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$$

- (a) Geben Sie an, welche Beschränkungen es für die Zeilenzahl, Spaltenzahl und Inventierbarkeit von $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{X}$ gibt, so daß die Rechenoperationen in der Gleichung definiert sind und die Gleichung nach $\mathbf{X}$ lösbar ist.
- (b) Lösen Sie die Gleichung nach $\mathbf{X}$ auf.

86. Berechnen Sie mit dem Simplexalgorithmus.

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & 2x + 3y \\ \text{NB:} & 2x + y \leq 10 \\ & x + 2y \leq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

87. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{3}(x + 2)^3 + (y - 1)^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x - y = -1$$

88. Bestimmen Sie $\frac{\partial x_2}{\partial x_4}$ aus der impliziten Funktion:

$$x_3^3 + x_2 \cdot x_4 + \exp(x_1^2 + x_4^2) = 0$$

89. Sei

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

- (a) Berechnen Sie die stationären Punkte von f .
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.
- (c) Ist f in $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ konvex, konkav oder keines von beiden? (Begründung)
- (d) Was können Sie über die globalen Extremwerte von f in D sagen?

90. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.
- (b) Berechnen Sie den Rang von $\mathbf{A}$.
- (c) Sind die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ linear unabhängig? (Begründung)
- (d) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? (Begründung)

- (e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (f) Berechnen Sie die inverse Matrix von $\mathbf{A}$.

91. (a) Berechnen Sie die Elastizität von

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1$$

- (b) In welchen Punkten ist f 1-elastisch.

- (c) In welchem Bereich ist f elastisch.

92. (a) Berechnen Sie das Differential der Funktion

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 5x - 1$$

an der Stelle $x = 0$.

- (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Differentials and der Stelle $x = 0$ ein Näherungswert für den Funktionswert von f in den Punkten 0,1 und 0,2.

Lösungen

85. (a) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{X}$ müssen quadratisch mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl sein, $\mathbf{A}$ muß invertierbar sein, (b) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

86. min: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 10$, $x_4 = 10$, $z_{\min} = 0$; max: $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $z_{\max} = \frac{50}{3}$.

87. stationäre Punkte: $(-3 - \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5})$ und $(-3 + \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5})$.

88. $\frac{\partial x_2}{\partial x_4} = -\frac{x_2 + 2x_4 \exp(x_1^2 + x_4^2)}{x_4}$.

89. (a) stationärer Punkt: $(0, 0)$, (b) lokales Maximum, (c) f ist in D konvex, (d) $(0, 0)$ ist ein globales Maximum.

90. (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (b) $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$, (c) linear abhängig, da $\det(\mathbf{A}) = 0$ bzw. da $\text{rg}(\mathbf{A}) < 3$, (d) nicht invertierbar, da $\det(\mathbf{A}) = 0$,

- (e) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (f) $\mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht (wegen (d)).

91. (a) $\varepsilon_f(x) = \frac{8x^2 + 3x}{4x^2 + 3x + 1}$, (b) elastisch in $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

92. (a) $df = 5 dx$, (b) $f(0,1) \approx -0,5$, $f(0,2) \approx 0$.