1. Oktober 1996

67. (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Welchen Rang hat die Matrix?

68. (a) Bestimmen Sie die Elastizität von

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

(b) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen $f(x)$ elastisch bzw. unelastisch ist.

69. (a) Bestimmen Sie die Inverse zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Prüfen sie mittels Multiplikation von $\mathbf{A}^{-1}$ mit $\mathbf{A}$, ob Sie $\mathbf{A}^{-1}$ richtig berechnet haben.

70. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x + y^2)e^{-x}$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

71. Bestimmen Sie die Lösung x des folgenden Gleichungssystems

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

72. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)}$$

Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Extremwerte und zeichnen Sie ein Skizze.

73. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x) = x^2 y$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = \frac{1}{2}$$

mit Lagrangemultiplikatoren.

74. Bestimmen Sie die Ableitung $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion

$$\ln(x^2 + y^2) = 1$$

75. Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\max \quad z = x + y$$

$$\begin{aligned} x &\leq 6 \\ y &\leq 8 \\ 2x + y &\leq 14 \\ x + y &\leq 10 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung graphisch.

(b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösungen

67. (a) $\det(\mathbf{A}) = 6$, (b) $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 4$.

68. (a) $\varepsilon_f(x) = 2-x$, (b) elastisch in $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, unelastisch in $(1, 3)$, 1-elastisch in $x = 1$ und $x = 3$.

69. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

70. (a) stationärer Punkt: $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, (b) Sattelpunkt.

71. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

72. Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, Nullstelle in $x = 0$, lokales Maximum in $x = 1$, lokales Minimum in $x = -1$.

73. stationärer Punkt: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $\lambda = \frac{1}{9}$.

74. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$.

75. (b) Optimum nicht eindeutig. zwei zulässige Basislösungen des Tableaus: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ und $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, $x_6 = 0$.