20. November 1996

57. Gegeben sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & -7 & 11 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\mathbf{A}$.
- Wieviele Lösungen besitzt das Gleichungssystem $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$?
- Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.
- Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? (Begründung)
- Sind die Zeilenvektoren untereinander linear unabhängig?

58. Lösen Sie die Matrixgleichung nach $\mathbf{X}$ auf

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C}$$

59. Berechnen Sie $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$ aus der impliziten Funktion

$$\ln(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + e^{x_3} + 1 = 0$$

60. (a) Bestimmen Sie die Elastizität von

$$f(x) = e^{-4x + 5}$$

- Bestimmen Sie die Bereiche in denen $f(x)$ elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch ist.

61. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\text{Max/Min} \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 10$$

im Definitionsbereich

$$D = \{x \mid -6 \leq x \leq 2\}$$

62. (a) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

63. (a) Bestimmen Sie stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 + 3$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 16$$

mittels Lagrange-Multiplikatoren.

(b) Handelt es sich um einen globalen Extremwert?

64. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1} + e^{x_3^2}$$

65.

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & 3x_1 + x_2 \\ \text{NB:} & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

(b) Lösen Sie das Problem graphisch (Min, Max).

(c) Zeichnen Sie die neue Lösung (Min, Max) ein, wenn zusätzlich noch die Nebenbedingung $x_1 = 4$ eingeführt wird.

66. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$2x_1 + 4x_2 = 9$$

$$4x_1 + 8x_2 = 15$$

Lösungen

57. (a) $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$, (b) $\text{rg}(\mathbf{E}) = 3 \neq \text{rg}(\mathbf{A})$, inkonsistent, keine Lösung, (c) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (d) nicht invertierbar, da $\det(\mathbf{A}) = 0$, (e) linear abhängig, da $\det(\mathbf{A}) = 0$.

58. $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}$.

59. $\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -1$.

60. (a) $\varepsilon_f(x) = -4x$, (b) elastisch in $(-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$, unelastisch in $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, 1-elastisch für $x = -\frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{4}$.

-
61. globales Maximum in $x = 2$, globales Minimum in $x = -1$.
62. (a) 16, (b) 32, (c) 16.
63. (a) stationärer Punkt: $(12, 4)$, $\lambda = 28$, (b) globales Minimum.
64. stationärer Punkt: $(-1, 0, 0)$.
65. (a) min: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 10$, $x_4 = 4$, $z_{\min} = 0$; max: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$,
 $x_4 = 4$, $z_{\max} = 15$.
66. inkonsistentes Gleichungssystem, keine Lösung.