25. Februar 1997

39. Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_2}$ der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \sin(x_1) + x_2^3 x_3$$

40. Ein Unternehmen stellt drei Produkte, A, B und C her. Die Stückkosten für die Herstellung sind 17 (A), 19 (B) und 22 (C) Geldeinheiten, die entsprechenden Verkaufspreise 28 (A), 25 (B) und 30 (C) Geldeinheiten. Alle nachfolgenden Angaben beziehen sich auf den Planungshorizont der nächsten sechs Monate. Die am Markt maximal absetzbare Stückzahl des Produkts A in dieser Zeit ist 2000 Einheiten. Aufgrund einer vertraglichen Verpflichtung müssen 1000 Einheiten des Produkts B und 1800 Einheiten des Produkts C gefertigt werden. Ein weitergehender Absatz von B ist nicht möglich, bei C kann über diese Minimalmenge hinaus noch mit einem Absatz von bis zu 4000 Einheiten am Markt gerechnet werden.

Die drei Produkte durchlaufen zwei Produktionsphasen. Die benötigte Anzahl von Maschinenstunden für die Herstellung einer Einheit jedes der drei Produkte in jeder der beiden Produktionsphasen ist in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

	Phase 1	Phase 2
A	0,6	0,7
B	0,8	1,1
C	0,9	0,5

In Produktionsphase 1 stehen maximal 3400 Maschinenstunden, in Phase 2 3000 Maschinenstunden zur Verfügung.

(a) Geben Sie Zielfunktion und sämtliche Nebenbedingungen des linearen Optimierungproblems an, mit dem der Produktionsplan des Unternehmens (die herzustellende Stückzahl von A,B und C), der den Gewinn maximiert berechnet werden kann.

(b) Transformieren Sie das lineare Optimierungsproblem in die Standardform.

Hinweis: Die Lösung des Optimierungsproblems mit dem Simplexalgorithmus ist nicht Teil der Aufgabenstellung.

41. Bestimmen Sie, falls möglich, die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 - x_1^4$$

im Punkt $(1, 2)$.

43. Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{5}{3} & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

44. (a) Bestimmen Sie ein lokales Minimum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 3)^4, \qquad -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty$$

Zeigen Sie die Minimumseigenschaft mit Hilfe der Hessematrix.

(b) Hat die Funktion im gesamten Definitionsbereich ein einheitliches Krümmungsverhalten? Untersuchen Sie diese Frage ebenfalls mit der Hessematrix und geben Sie an, ob es sich beim zuvor gefundenen Minimum um ein globales Minimum handelt.

45. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 \\ -5 & 26 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

46. Bestimmen Sie die Kofaktorenmatrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

47. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ quadratische Matrizen gleicher Größe wie $\mathbf{X}$ sind.

48. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 2)^2$$

unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 1$ mit Hilfe von Lagrangemultiplikatoren.

Lösungen

39. $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_2} = 6\,x_2$.

40. (a) x_1, x_2, x_3 ... Menge der Produkte A, B bzw. C. Zielfunktion: $z = 11\,x_1 + 6\,x_2 + 8\,x_3 \rightarrow$ max, Nebenbedingungen: $x_1 \leq 2000$, $x_2 = 1000$, $x_3 \geq 1800$, $x_3 \leq 5800$, $0{,}6\,x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}9\,x_3 \leq 3400$, $0{,}7\,x_1 + 1{,}1\,x_2 + 0{,}5\,x_3 \leq 3000$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
(b) Standardform: $z = 11\,x_1 + 6\,x_2 + 8\,x_3$, $x_1 + x_4 = 2000$, $x_2 = 1000$, $x_3 - x_5 = 1800$, $x_3 + x_6 = 5800$, $0{,}6\,x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}9\,x_3 + x_7 = 3400$, $0{,}7\,x_1 + 1{,}1\,x_2 + 0{,}5\,x_3 + x_8 = 3000$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$.

41. nicht inverierbar.

42. $\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

43. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1$

44. (a) stationärer Punk in $(0,3)$, (b) alle Hauptminoren sind $\geq 0 \Rightarrow f$ is im gesamten Definitionsbereich konvex $\Rightarrow$ stationärer Punkt ist globales Minimum.

45. Rang 4.

46. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

47. $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{B}^{-1}$.

48. stationärer Punkt: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 3$.