22. April 1997

30. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dx}{dy}$ der impliziten Funktion

$$xy + x^2 - y^2 = 1$$

31. Sei

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 3y^2 + x$$

(a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung von f (konkav/konvex).

(d) Gibt es globale Minima und Maxima? Welche?

32. Berechnen Sie alle stationären Punkte von

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 3y^2 + x$$

unter der Nebenbedingung

$$y - x = 1.$$

33. Lösen sie die folgende Optimierungsaufgabe. (Gesucht sind alle globalen Extrema.)

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & e^{\frac{1}{3}x^3 - x} \\ & -1 \leq x \leq 3 \end{array}$$

34. Bestimmen Sie, falls möglich, die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 8 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

(b) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar?

(c) Ist $\mathbf{A}$ singulär oder regulär?

(d) Hat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine eindeutig bestimmte Lösung?

36. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{B}\,\mathbf{X} = \mathbf{C}\,\mathbf{X} + \mathbf{I}$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{X}$ quadratische Matrizen gleicher Größe sind.

37. Gegeben ist folgendes lineares Optimierungssystem

$$\begin{array}{lr} \text{Max} & 2x + y \\ \text{NB:} & x \leq 10 \\ & y \leq 2 \\ & 3x + 15y \leq 45 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

(b) Lösen Sie das Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

38. (a) Berechnen Sie die Elastizität von $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x}$.

(b) Ist f an der Stelle $x = -2$ elastisch?

Lösungen

30. $\frac{dx}{dy} = -\frac{x-2y}{2x+y}$.

31. (a) stationärer Punkt $\mathbf{x}_0 = (-3, 1)$, (b) $\mathbf{x}_0$ ist ein lokales Minimum (alle Hauptminoren > 0), (c) f ist konvex (alle Hauptminoren *für alle* $\mathbf{x} > 0$), (d) $\mathbf{x}_0$ ist globales Minimum, kein globales Maximum.

32. stationärer Punkt in $(-\frac{9}{11}, \frac{2}{11})$.

33. globales Maximum in $x_1 = 1$, globales Minimum in $x_2 = 3$.

34. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

35. (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (b) $\mathbf{A}$ ist nicht invertierbar, da $\det(\mathbf{A}) = 0$, (c) $\mathbf{A}$ ist singulär, (d) nein, da $\mathbf{A}$ nicht regulär.

36. $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$.

37. optimale zulässige Basislösung: $x = 10$, $y = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$. Maximum in $(10, 1)$, $z_{max} = 21$.

38. (a) $\varepsilon_f(x) = x^3 - x$, (b) f is an der Stelle -2 elastisch.