26. Juni 1997

21. (a) Berechnen sie $\frac{df}{dx}$ für $f(x) = e^{ax^2+b} - c$.

(b) Berechnen sie $\frac{df}{dx}$ für $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$.

(c) Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion $y^3 - x^2 + 3xy = 1$.

22. Sei

$$f(x, y) = 4(x + \frac{1}{2}y)^2 + 3x^2$$

(a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung von f.

23. Lösen sie die folgende Optimierungsaufgabe. (Gesucht sind alle globalen Extrema.)

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & e^{x^2+2x-15} \\ & -2 \leq x \leq 4 \end{array}$$

24. (a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch die Multiplikation $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}$.

25. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

(b) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar?

(c) Ist $\mathbf{A}$ singulär oder regulär?

(d) Hat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine eindeutig bestimmte Lösung?

26. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{X} - (\mathbf{A} + \mathbf{D})\mathbf{X} = \mathbf{E}.$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ quadratische Matrizen gleicher Größe sind.

27. Gegeben ist folgendes lineares Optimierungssystem

$$\begin{array}{lr} \text{Max} & x + y \\ \text{NB:} & x \leq 6 \\ & y \leq 3 \\ & \frac{1}{2}x + y \leq 5 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

28. Bringen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 + x_4 \\ \text{NB:} & x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

auf Standardform.

Hinweis: Die Lösung des Optimierungsproblems mit dem Simplexalgorithmus ist nicht Teil der Aufgabenstellung.

29. Ein Unternehmen erzeugt zwei Produkte x_1, x_2 und verkauft diese zu einem Preis p_1 bzw. p_2. Von Produkt x_1 werden n_1, von Produkt x_2 n_2 Stück verkauft. Bei der Produktion fallen Produktionskosten y_1 bzw. y_2 (pro Stück) an. Stellen Sie den Gewinn G des Unternehmens als mathematische Funktion der oben angeführten Größen dar.

Lösungen

21. (a) $\frac{df}{dx} = e^{a\,x^2+b}\,(2\,a\,x)$, (b) $\frac{df}{dx} = \cos(x)\,\ln(x) + \sin(x)\cdot\frac{1}{x}$, (c) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\,x-3\,y}{3\,y^2+3\,x}$.

22. (a) stationärer Punkt in $(0,0)$, (b) lokales Minimum (alle Hauptminoren > 0), (c) konvex.

23. globales Maximum in $x_1 = 4$, globales Minimum in $x_2 = -1$.

24. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

25. (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (b) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$, (c) singulär, (d) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$.

26. $\mathbf{X} = (\mathbf{A}\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}+\mathbf{D}))^{-1}\,\mathbf{E}$.

27. Maximum in $(6,2)$.

28. $x_4 = x_4' - x_4''$,

$$\begin{array}{ll} \text{max} & z = 4\,x_1 - 2\,x^2 + 9\,x_3 + x_4' - x_4'' \\ \text{NB:} & x_1 + 3\,x_2 - s_1 = 4 \\ & x_1 + x_4' - x_4'' + s_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'', s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

29. $G = p_1\cdot n_1 + p_2\cdot n_2 - y_1\cdot n_1 - y_2\cdot n_2$.