

26. Juni 1997

21. (a) Berechnen sie $\frac{df}{dx}$ für $f(x) = e^{ax^2+b} - c$.
 (b) Berechnen sie $\frac{df}{dx}$ für $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$.
 (c) Berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ der impliziten Funktion $y^3 - x^2 + 3xy = 1$.

22. Sei

$$f(x, y) = 4\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + 3x^2$$

- (a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f .
 (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hessematrix, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.
 (c) Bestimmen Sie die Krümmung von f .
23. Lösen sie die folgende Optimierungsaufgabe. (Gesucht sind alle globalen Extrema.)

$$\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & e^{x^2+2x-15} \\ & -2 \leq x \leq 4 \end{array}$$

24. (a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch die Multiplikation $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}$.

25. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.
 (b) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar?
 (c) Ist $\mathbf{A}$ singular oder regulär?
 (d) Hat $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine eindeutig bestimmte Lösung?

26. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{X} - (\mathbf{A} + \mathbf{D}) \mathbf{X} = \mathbf{E}.$$

Gehen Sie davon aus, daß $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ quadratische Matrizen gleicher Größe sind.

27. Gegeben ist folgendes lineares Optimierungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x + y \\ \text{NB:} & x \leq 6 \\ & y \leq 3 \\ & \frac{1}{2}x + y \leq 5 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

28. Bringen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 + x_4 \\ \text{NB:} & x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

auf Standardform.

Hinweis: Die Lösung des Optimierungsproblems mit dem Simplexalgorithmus ist nicht Teil der Aufgabenstellung.

29. Ein Unternehmen erzeugt zwei Produkte x_1 , x_2 und verkauft diese zu einem Preis p_1 bzw. p_2 . Von Produkt x_1 werden n_1 , von Produkt x_2 n_2 Stück verkauft. Bei der Produktion fallen Produktionskosten y_1 bzw. y_2 (pro Stück) an. Stellen Sie den Gewinn G des Unternehmens als mathematische Funktion der oben angeführten Größen dar.

Lösungen

21. (a) $\frac{df}{dx} = e^{ax^2+b} (2ax)$, (b) $\frac{df}{dx} = \cos(x) \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$, (c) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x-3y}{3y^2+3x}$.

22. (a) stationärer Punkt in $(0,0)$, (b) lokales Minimum (alle Hauptminoren > 0), (c) konvex.

23. globales Maximum in $x_1 = 4$, globales Minimum in $x_2 = -1$.

24. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

25. (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (b) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$, (c) singulär, (d) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$.

26. $\mathbf{X} = (\mathbf{AB} - (\mathbf{A} + \mathbf{D}))^{-1} \mathbf{E}$.

27. Maximum in $(6, 2)$.

28. $x_4 = x'_4 - x''_4$,

$$\begin{array}{ll} \text{max} & z = 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 + x'_4 - x''_4 \\ \text{NB:} & x_1 + 3x_2 - s_1 = 4 \\ & x_1 + x'_4 - x''_4 + s_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x'_4, x''_4, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

29. $G = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 - y_1 \cdot n_1 - y_2 \cdot n_2$.