29. September 1997

10. Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

11. Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{X}$ der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{X}$$

Gehen Sie davon aus, daß die diversen Matrixoperationen alle definiert (Zeilen- bzw. Spaltenanzahl der Faktormatrizen, Invertierbarkeit) sind.

12. Berechnen Sie $\frac{\partial x}{\partial y}$ der implizit gegebenen Funktion

$$x^2 + y + e^{x+y} = 1$$

13. Berechnen Sie das Ergebnis der Vereinfachung des Matrixausdrucks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14. Das folgende lineare Optimierungsproblem hat unendlich viele Maxima:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{NB:} & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \end{array}$$

Zeigen Sie diese Eigenschaft

(a) mit Hilfe der graphischen Lösung des Problems,

(b) mit Hilfe der Lösung durch den Simplexalgorithmus.

Begründen Sie Ihre Lösung in beiden Fällen in Stichworten.

15. Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 1} + e^{x_2^2 - 2} + 3$$

hat in $x_1 = 0, x_2 = 0$ ein Minimum. Weisen Sie die Minimumseigenschaft mit der Hessematrix nach.

16. Welches Krümmungsverhalten (konkav/konvex, Änderungen der Krümmung) hat die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^4$$

17. Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aus Beispiel 10.

18. Bestimmen Sie die Kofaktoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

19. Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + (x_1 - x_2)^2$$

20. Zeichnen Sie die Höhenlinie für $f(x_1, x_2) = 10$ der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 3$$

Lösungen

10. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$

11. $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}$

12. $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{1+e^{x+y}}{2x+e^{x+y}}$

13. $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$

14. (a) Die Isonutzenlinie fällt mit der Begrenzungsgerade zusammen. (b) Die Zeilfunktion hängt im Endtableau nicht von allen „Nichtbasisvariablen“ ab: der entsprechende Eintrag in der Zielfunktionszeile ist 0, obwohl die Variable gleich 0 gesetzt wurde; ein nochmaliger Pivotschritt — mit dieser Spalte als Pivotspalte — läßt die Zielfunktionszeile unverändert, ergibt aber eine andere (maximale) zulässige Basislösung.

15. Minimum in $(0, 0)$.

16. Funktion ist überall konvex (Hessematrix bzw. Minoren).

17. Rang 3

18. $|\mathbf{A}^*_{1,1}| = 2$, $|\mathbf{A}^*_{1,2}| = -2$, $|\mathbf{A}^*_{2,1}| = -4$, $|\mathbf{A}^*_{2,2}| = 1$.

19. $df = (\frac{1}{x_1} + 2\,(x_1 - x_2))\, f_{x_1} - 2\,(x_1 - x_2)\, f_{x_2}$.