27. Jänner 1998

1. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix bzw. erweiterten Koeffizientenmatrix die Anzahl der Lösungen für das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

(d) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Bestimmen Sie die Bereiche in denen die Funktion

$$f(x) = e^{(x^2+1)}$$

elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch ist.

3. Bestimmen Sie die stationären Punkte für

$$\begin{aligned} \min f(x,y) \quad &= \quad 400 + 5\,x^2 + y^2 \\ \text{NB:} \quad & \quad\; 5\,x + y = 12 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren.

4. Lösen Sie die Optimierungsaufgabe

$$\text{Max/Min} \quad f(x) = 4\,|x+2| - \frac{4}{3}x^3,$$

wobei $-4 \leq x \leq 4$.

5. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$f'(x) + 2\,f(x) - 8 = 0$$

mit der Anfangsbedingung $\quad f(0) = 5$.

6. (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion:

$$f(x,y) = e^{-x} + e^{y} + 5\,x - 2\,y$$

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hessematrix fest, ob es sich bei den stationären Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

7. (a) Lösen Sie graphisch das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min / \max \quad & 4\,x_1 + 2\,x_2 \\ \text{NB:} \quad & x_1 \leq 7 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Wie ändert sich die Lösung durch das Hinzufügen der weiteren Nebenbedingung:

$$x_1 \geq 10$$

8. Berechnen Sie $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$ der impliziten Funktion:

$$\ln(x_1 + x_2) + x_3^2 = 0$$

9. (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie unter zu Hilfenahme der Determinante von $\mathbf{A}$ die Determinaten der folgenden zwei Matrizen.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen

1. (a) $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{E}) = 2 >$ Anzahl der Variablen $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen. (b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $\det(\mathbf{A}) = 0$, (d) nein, da $\det(\mathbf{A}) = 0$.

2. $\varepsilon_f(x) = 2x^2$, 1-elastisch in $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $-\sqrt{\frac{1}{2}}$;
elastisch in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$, unelastisch in $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$.

3. stationärer Punkt in $\mathbf{x}_0 = (2, 2)$.

4. globales Maximum in -4, globales Minimum in 4.

5. $f(x) = e^{-2x} + 4$.

6. (a) stationärer Punkt in $\mathbf{x}_0 = (-\ln 5, \ln 2)$, (b) $\mathbf{x}_0$ ist lokales Minimum.

7. (a) Minimum in $(0, 0)$, Maximum in $(7, 1)$, (b) zulässiger Bereich leer, keine Lösung

8. $\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -1$.

9. (a) $\det(\mathbf{A}) = -20$, (b) $\det(\mathbf{B}) = 20$ (1. und 3. Spalte vertauscht), (c) $\det(\mathbf{C}) = -40$ (2. Zeile mit 2 multipliziert).