Kapitel 9

Taylorreihen

Lernziele

- Taylorreihe und MacLaurinreihe
- Beispiele
- Alternative Schreibweisen
- Approximation der Veränderung einer Funktion
- Delta-Methode: Approximation von $\mathrm{E}[f(X)]$

Taylorreihe

Wenn eine Funktion $f(x)$ genügend oft differenzierbar ist, kann sie durch ein Polynom n-ter Ordnung approximiert werden.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Man sagt, die Funktion $f(x)$ wird

- an der Stelle x_0 in eine **Taylorreihe** bis zur Ordnung n entwickelt.
- durch ein Polynom n-ter Ordnung approximiert (**Taylorpolynom**).

Taylorreihe / (2)

Bezeichnung:

- $f^{(k)}(x)$ bezeichnet die k-te Ableitung von f nach x.
- $f^{(k)}(x_0)$ ist der Wert der k-ten Ableitung von f an der Stelle x_0.
- $k!$ heißt k-Faktorielle: $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.
  $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Die Approximation ist umso besser (der Fehler ist umso kleiner)

- je näher x an der Entwicklungsstelle x_0 ist;
- je größer die Ordnung n ist.

Die Koeffizienten des Polynoms sind so gewählt, dass die ersten n Ableitungen mit jener von f übereinstimmen.

MacLaurinreihe

Der Spezialfall mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ wird auch als **MacLaurin-Polynom** bezeichnet.

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

Taylorreihe: $n = 1$

Für $n = 1$ ergibt sich ein Polynom erster Ordnung (lineare Funktion).

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Man schreibt auch

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$\doteq$ bedeutet „**in erster Näherung**“.

Wenn wir die Näherung verwenden, rechnen wir mit der Tangente der Funktion an der Stelle x_0 anstatt mit f.

Beispiel: $\exp(x)$

Taylorentwicklung erster Ordnung von $f(x) = \exp(x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + f'(0)\, x \\ \exp(x) &\approx \;\; 1 \;\; + \;\; 1 \;\;\; x = 1 + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x) & \quad f(0) &= \exp(0) = 1 \\ f'(x) &= \exp(x) & \quad f'(0) &= \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung von $\exp(x)$ in $x_0 = 0$ ist

$$t(x) = 1 + x$$

Beispiel: $\log(1+x)$

Taylorentwicklung erster Ordnung von $f(x) = \log(1+x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

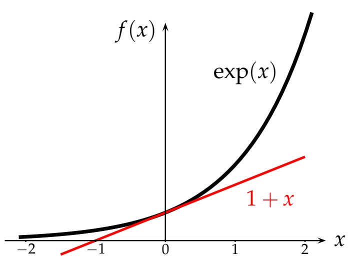
$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + f'(0)\, x \\ \log(1+x) &\approx \;\; 0 \;\; + \;\; 1 \;\;\; x = x \end{aligned}$$

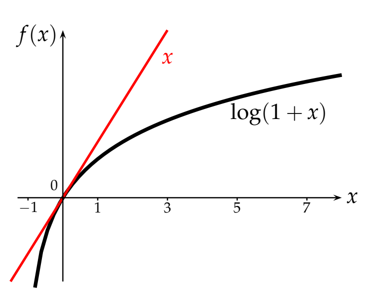
$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) & \quad f(0) &= \log(1) = 0 \\ f'(x) &= 1/(1+x) & \quad f'(0) &= 1/(1+0) = 1 \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung von $\log(1+x)$ in $x_0 = 0$ ist

$$t(x) = x$$

Graph: $\exp(x)$ und $\log(1+x)$





Wir approximieren $\exp(x)$ an der Stelle 0 durch eine Gerade:

$$\exp(x) \doteq 1 + x$$

Wir approximieren $\log(1+x)$ an der Stelle 0 durch eine Gerade.

$$\log(1+x) \doteq x$$

Anwendung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = \exp(x)$$

Eine Motivation für diese Beziehung erhalten wir über

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\cdot\log(1+x/n)} \doteq e^{n\cdot(x/n)} = e^x$$

Die Näherung $\log(1+x) \doteq x$ ist gut, wenn x betragsmäßig klein ist.

Taylorreihe: $n = 2$

Für $n = 2$ ergibt sich ein Polynom zweiter Ordnung (quadratische Funktion).

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Die Approximation zweiter Ordnung ist in der Regel eine bessere lokale Approximation als die Erste.

Beispiel: $\exp(x)$ $(n = 2)$

Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x) = \exp(x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{f''(x_0)}{2!}\,x^2$$

$$\exp(x) \approx 1 + 1\,x + \tfrac{1}{2}\,x^2 = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x) & f(0) &= \exp(0) = 1 \\ f'(x) &= \exp(x) & f'(0) &= \exp(0) = 1 \\ f''(x) &= \exp(x) & f''(0) &= \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

Beispiel: $\log(1+x)$ $\quad (n=2)$

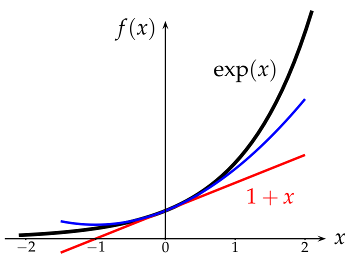
Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x) = \log(1+x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

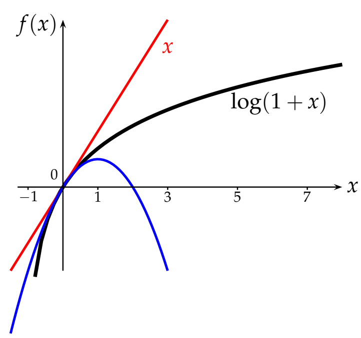
$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(x_0)}{2!}\, x^2$$

$$\log(1+x) \approx \quad 0 \quad + \quad 1 \quad x + \quad \frac{-1}{2} \quad x^2 = x - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log(1+x) & f(0) = \log(1) = 0 \\ f'(x) = 1/(1+x) = (1+x)^{-1} & f'(0) = 1/(1+0) = 1 \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} & f''(0) = -(1+0)^{-2} = -1 \end{array}$$

Graph: $\exp(x)$ und $\log(1+x)$





$$\exp(x) \approx 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} \qquad\qquad \log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

Wichtige Taylorreihen $\quad (x_0 = 0)$

- Exponentialfunktion

  $$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

- Logarithmus

  $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

- Sinus

  $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

- Kehrwert

  $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Alternative Schreibweise: $h = (x - x_0)$

Wir heben die Veränderung $(x - x_0)$ hervor, indem wir sie mit $h \quad (= (x - x_0))$ bezeichnen.
Die Entwicklungsstelle bezeichnen wir als x.

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,h + \frac{f''(x)}{2!}\,h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,h^n$$

- x_0 wird durch x ersetzt,
- $(x - x_0)$ durch h, und
- x durch $(x + h)$.

Alternative Schreibweise: $\Delta x = (x - x_0)$

Schreiben Taylorreihe mit Δx anstatt h.

$$f(x+\Delta x) \;\approx\; f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\,(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,(\Delta x)^n$$

- Δx bezeichnet die **Änderung** von x.

Approximation für $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Wir $f(x)$ auf die linke Seite. Erhalten damit eine Entwicklung für die Veränderung der Funktion.

- $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ bezeichnet die **Änderung** von $f(x)$ (wenn sich x um Δx ändert)

Wir vergleichen den Funktionswert an der Stelle x mit dem bei $(x + \Delta x)$.

$$\Delta f(x) \;\approx\; \frac{f'(x)}{1!}\,\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\,(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,(\Delta x)^n$$

Approximation für Δf in 1. Näherung

In erster Näherung gibt sich mit $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\boxed{\Delta f(x) \doteq f'(x)\,\Delta x}$$

Die Veränderung des Funktionswertes wird gut durch die Ableitung an der Stelle x mal der Schrittweite, Δx, beschrieben.
(Steigung der Tangente mal Schrittweite)

Diese „diskrete“ Approximation einer stetigen Funktion werden wir im Folgenden extensiv verwenden.

Beispiel: $\log(1 + x)$

In erster Näherung gibt sich für $\Delta f(x)$

$$\Delta f(x) \doteq \frac{1}{1+x}\,\Delta x$$

Änderung von $f(x) = \log(1 + x)$ an der Stelle $x = 2$:

$$\Delta f(2) = f(2 + \Delta x) - f(2) \doteq \frac{1}{1+2}\,\Delta x = \frac{1}{3}\,\Delta x$$

Wenn wir von 2 nach 2.5 gehen erhalten wir $\Delta = 1/2$ und

$$\Delta f(2) = [f(2 + 0.5) - f(2)] \doteq \frac{1}{1+2}\,0.5 = \frac{1}{6}$$

Die Änderung der Funktion beträgt zwischen 2 und 2.5 ungefähr 1/6.

Delta-Methode: Approximation von $\mathrm{E}[f(X)]$

Sei X eine ZV mit $\mathrm{E}(X) = \mu$ und $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$.
$f(X)$ sei eine (nicht-lineare) Funktion in X.

Die **Delta-Methode** approximiert den Erwartungswert der nicht-linearen Funktion, $\mathrm{E}[f(X)]$, in dem die Funktion in eine Taylorreihe bis zu einer (niedrigen) Potenz entwickelt und anschließend von dieser der Erwartungswert berechnet wird.

Approximation 1. Ordnung

Wir entwickeln f an der Stelle μ. Also $x_0 = \mu$:

$$f(X) \doteq f(\mu) + f'(\mu)\,(X-\mu)$$

$$\mathrm{E}[f(X)] \approx f(\mu) \quad \text{und} \quad \mathrm{V}[f(X)] \approx f'(\mu)^2\,\sigma^2$$

Aus den Rechenregeln für Linearkombinationen von Zufallsvariablen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(X)] &\doteq \mathrm{E}[f(\mu) + f'(\mu)\,(X-\mu)] \\
&= \mathrm{E}[f(\mu)] + f'(\mu)\,\mathrm{E}[(X-\mu)] = f(\mu) \\
\mathrm{V}[f(X)] &\doteq \mathrm{V}[f(\mu) + f'(\mu)\,(X-\mu)] = f'(\mu)^2\,\sigma^2
\end{aligned}$$

Approximation 2. Ordnung

Wir entwickeln f an der Stelle μ. Also $x_0 = \mu$:

$$f(X) \doteq f(\mu) + f'(\mu)\,(X-\mu) + \frac{f''(\mu)}{2!}(X-\mu)^2$$

Dann erhalten wir für den Erwartungswert

$$\mathrm{E}[f(X)] \approx f(\mu) + \frac{1}{2} f''(\mu)\,\sigma^2$$

und für die Varianz **unter der Annahme**, dass X normal verteilt ist, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\mathrm{V}[f(X)] \approx f'(\mu)^2\,\sigma^2 + \frac{1}{2} f''(\mu)^2\,\sigma^4$$

Approximation 2. Ordnung / Herleitung

Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(X)] &\approx \mathrm{E}[f(\mu) + f'(\mu)\,(X-\mu) + \tfrac{f''(\mu)}{2!}(X-\mu)^2] \\
&= \mathrm{E}[f(\mu)] + f'(\mu)\,\mathrm{E}[(X-\mu)] + \tfrac{1}{2} f''(\mu)\,\mathrm{E}[(X-\mu)^2] \\
&= f(\mu) + f'(\mu)\,(\mathrm{E}[X]-\mu) + \tfrac{1}{2} f''(\mu)\,\mathrm{V}[X]^2 \\
&= f(\mu) + \tfrac{1}{2} f''(\mu)\,\sigma^2
\end{aligned}$$

Für die Varianz benötigen wir das 3. und 4. Moment der Normalverteilung, $\mathrm{E}[(X-\mu)^3]$ und $\mathrm{E}[(X-\mu)^4]$. Diese sind

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^3] = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{E}[(X-\mu)^4] = 3\,\sigma^4$$

Das 3. Moment („Schiefe“) ist Null, da die Normalverteilung symmetrisch ist.
(Wir leiten aber die Beziehung für die Varianz nicht her.)

Beispiel: $\exp(X)$

Sei $f(X) = \exp(X)$ und $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$:

Approximation 1. Ordnung:

$$\mathrm{E}[f(X)] \approx \exp(\mu) \quad \text{und} \quad \mathrm{V}[f(X)] \approx \exp(\mu)^2\,\sigma^2$$

Approximation 2. Ordnung:

$$\mathrm{E}[f(X)] \approx \exp(\mu) + \frac{1}{2}\,\exp(\mu)\,\sigma^2 = \exp(\mu)\,(1 + \sigma^2/2)$$

$$\mathrm{V}[f(X)] \approx \exp(\mu)^2\,\sigma^2 + \frac{1}{2}\,\exp(\mu)^2\,\sigma^4 = \exp(2\,\mu)\,\sigma^2\,(1 + \sigma^2/2)$$

Bemerkung: Die ZV $Y = \exp X$ ist lognormal verteilt.