Kapitel 8

Erwarteter Nutzen

Lernziele

- Nutzenfunktion zur Risikobewertung
- Erwarteter Nutzen
- Maße für Risikoaversion
- Indifferenzkurven in der $\sigma^2 \times \pi^e$–Ebene
- Intertemporaler Nutzen für Mehrperioden-Entscheidungen

Überblick

Die Nutzentheorie wird hier auf Entscheidungen unter Unsicherheit angewandt. Sie dient auch zur Charakterisierung von Investoren.

- Der abnehmende Grenznutzen einer zusätzlichen Weinflasche (konkave Nutzenfunktion) wird hier einem **risikoaversen** Investor zugeschrieben.
- Ist der Beitrag der zweiten Weinflasche zum Nutzen größer als die erste (konvexe Nutzenfunktion), so werden wir sagen, der Investor ist **risikofreudig**.
- Dazwischen (die erste Flasche ist genauso gut wie die zweite) liegt **Risikoneutralität**.
- Konsumströme, die über mehrere Perioden verteilt sind, werden über einen diskontierten Nutzen bewertet.

Erwarteter Nutzen

Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{U(W)}$ den Nutzen des Vermögens W ($wealth$).

Im Gegensatz zum deterministischen Fall ist W hier stochastisch, eine Zufallsvariable. Das bedeutet, W ist keine feste Zahl, sondern kann verschiedene Werte annehmen, die wir im Voraus nicht kennen. In einem Zeitpunkt ist W klein (Pech), manchmal ist W groß (Glück).

Unsere Entscheidung wird nicht bezüglich des erwarteten (durchschnittlichen) Vermögens getroffen, sondern bezüglich des **erwarteten** (durchschnittlichen) **Nutzens** unseres Vermögens.

$$\mathrm{E}[U(W)] = \sum_{w} U(w)\,\mathrm{P}(w)$$

Steigende Nutzenfunktion

Wir wollen annehmen, dass eine Nutzenfunktion stets differenzierbar und **streng monoton steigend** ist.

$$U'(W) > 0$$

Risikoneutralität und Risikoaversion

Beispiel:
Wir werfen eine perfekte Münze. Die Auszahlungen sind 2 € bei Kopf bzw. 0 € bei Zahl bei einem Spieleinsatz von 1 €. Der erwartete monetäre Wert des (riskanten) Spiels ist 1 €, also der Einsatz:

$$2 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

Der Wert, dieses Spiel nicht zu spielen, ist ebenfalls 1 € (der Einsatz).

Der risikoaverse Investor wird an diesem Spiel nicht teilnehmen. Es stehen den sicheren 1 €, unsichere 1 € (2 € bzw. 0 € je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) gegenüber.

Risikoneutralität und Risikoaversion / (2)

Unter **Risikoaversion** gilt

$$U(1) > U(2) \cdot 1/2 + U(0) \cdot 1/2$$

d.h.

$$U(1) - U(0) > U(2) - U(1)$$

Die erste Ableitung nimmt ab. Risikoaversion impliziert daher

$$U''(W) < 0$$

Bei **Risikoneutralität** gilt das Gleichheitszeichen,

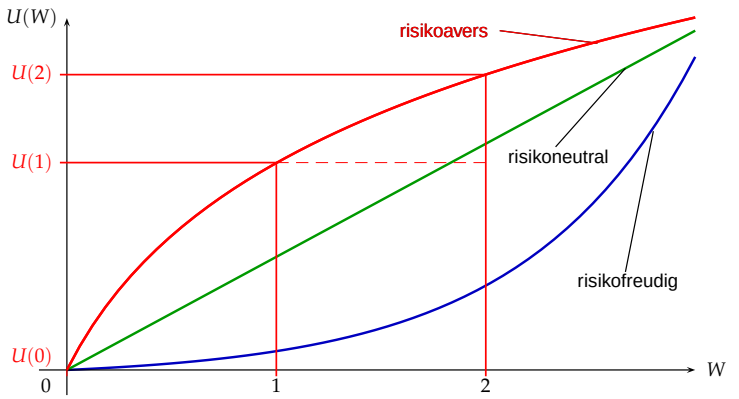
$$U''(W) = 0$$

Nutzenfunktion: Unsicherheit und Risiko

Übersicht:

$U''(W) < 0$	**risikoavers**
$U''(W) = 0$	**risikoneutral** Die Nutzenfunktion ist linear.
$U''(W) > 0$	**risikofreudig**

Risikoavers, Riskoneutral, Risikofreudig



Risikoavers: $U(1) - U(0) > U(2) - U(1)$

Maßzahlen für die Risikoaversion

Das **Arrow-Pratt Maß** für die **absolute Risikoaversion** ist

$$R_A(W) = -U''(W)/U'(W)$$

Das Maß für die **relative Risikoaversion** ist

$$R_R(W) = R_A(W)\,W$$

- Bei Risikoaversion sind $R_A(W)$ und $R_R(W) > 0$.
- Je größer R_A bzw. R_R desto größer ist die Risikoaversion.
- Sie sind ein Maß dafür, wie sich die Risikopräferenzen mit steigendem W verändern.

Abnehmende Risikoaversion

Abnehmende absolute Risikoaversion:
Angenommen ein (risikoaverser) Investor mit 10 000 € Vermögen hält 5 000 € in riskanten Anlagen. Falls sein Vermögen um weitere 10 000 € ansteigt und er dann davon mehr als 5 000 € riskant zu veranlagen bereit ist, spricht man von abnehmender Risikoaversion.

Abnehmende relative Risikoaversion:
Angenommen ein (risikoaverser) Investor hält 50% von 10 000 € in riskanten Anlagen. Falls sein Vermögen sich verdoppelt und er bereit ist den Anteil der riskanten Anlagen auf mehr als 50% zu erhöhen, spricht man von abnehmender relativer Risikoaversion.

$U(W) = \ln(W)$

Die Nutzenfunktion

$$U(W) = \ln(W)$$

- beschreibt Risikoaversion, $U''(W) < 0$.
  $U''(W) = [\ln(W)]'' = [1/W]' = -1/W^2 < 0$
- hat eine abnehmende absolute Risikoaversion.
  $R_A(W) = -U''(W)/U'(W) = -(-1/W^2)/(1/W) = 1/W > 0$
  $R_A(W) = 1/W$ fällt mit W.
- hat eine konstante relative Risikoaversion.
  $R_W(W) = R_A(W)\,W = (1/W)\,W = 1.$

$U(W) = a - b\exp(-cW)$

Die Nutzenfunktion

$$U(W) = a - b\exp(-cW), \qquad a, b, c > 0$$

- beschreibt Risikoaversion.

$$U''(W) = [a - b\exp(-cW)]'' = [-b\exp(-cW)\,(-c)]' = \\ = -b\,c^2\,\exp(-cW)$$

Da b positiv, $b > 0$, ist $U''(W) < 0$: Risikoaversion.

- hat eine konstante absolute Risikoaversion.

$R_A(W) = -U''(W)/U'(W) = -\frac{(b\,c^2\,\exp(-cW)\,(-c))}{(-b\,c\,\exp(-cW)\,(-c))} = c$

Stochastisches Modell

Das Vermögen W morgen (Zeitpunkt 1) sei

$$W = (1 + \pi)\,W_0$$

Wobei

- W_0 das Vermögen im Zeitpunkt 0 bezeichnet, und
- π die ungewisse Rendite (stochastisch) von Zeitpunkt 0 bis 1: $\pi = W/W_0 - 1$.

  Die Rendite
  - sei normalverteilt
  - mit der Erwartung $\mathrm{E}(\pi) = \pi^e$ und
  - der Varianz $\mathrm{V}(\pi) = \sigma_\pi^2$.

  Schreibweise $\pi \sim \mathcal{N}(\pi^e, \sigma_\pi^2)$.

Stochastisches Modell / Erwarteter Nutzen

Die Maximierung des erwarteten Nutzens

$$\max_W E[U(W)] = \max_W E[a - b\exp(-cW)]$$

ist in diesem Model äquivalent zur Maximierung von

$$U(\pi^e, \sigma_\pi^2) = \pi^e - \frac{c}{2}\,\sigma_\pi^2$$

Bemerkung:

- Die Herleitung verwendet, dass $\exp(-cW)$ (bedingt) lognormal-verteilt ist.
- Für π^e wird später die Bezeichnung μ verwendet werden, für σ_π^2 nur σ^2.

Nutzenfunktion in π^e und σ_π^2

Wir beschränken uns auf Nutzenfunktionen, die sich als Funktion der erwarteten Rendite, π^e, und der Varianz der Rendite, σ_π^2, darstellen lassen:

$$U = U(\pi^e, \sigma_\pi^2)$$

mit

$$U_1 > 0, \quad U_2 < 0, \qquad U_{11}, U_{22} < 0$$

U_1	ist die partielle Ableitung nach π^e,
U_2	die partielle Ableitung nach σ_π^2.
U_{11}	steht für $[\partial^2 U/(\partial \pi^e)^2]$,
U_{22}	steht für $[\partial^2 U/(\partial \sigma_\pi^2)^2]$.

Bemerkung:
Die Funktion $U(\pi^e, \sigma_\pi^2) = \pi^e - \frac{c}{2}\sigma_\pi^2$ erfüllt für $c > 0$ nur die Bedingungen $U_1 > 0, U_2 < 0$. ($U_{11}, U_{22} = 0$)

Nutzenfunktion in π^e und σ_π^2 / (2)

Der Nutzen

- steigt mit der erwarteten Rendite,
- fällt aber mit der Varianz (Risiko) in der Rendite.

Für beide Argumente, π^e und σ_π^2, gelten abnehmende Grenznutzen.

Indifferenzkurven für $U = U(\pi^e, \sigma_\pi^2)$

Eine **Indifferenzkurve** ist definiert als die Menge aller Punkte für die die Nutzenfunktion den gleichen Wert c aufweist.

$$U(\pi^e, \sigma_\pi^2) = c$$

- Alle Kombinationen (π^e, σ_π^2) auf einer Indifferenzkurve mit Niveau c, liefern denselben Nutzen mit dem Wert c.
- Der Investor ist indifferent zwischen diesen Kombinationen. Jede dieser Kombinationen ist für ihn gleich gut/schlecht.

Die Nutzenfunktion wird in der Portfoliooptimierung verwendet werden.

Darstellung der Indifferenzkurve

Wir stellen die Indifferenzkurven in der $\sigma_\pi^2 \times \pi^e$–Ebene dar.
σ_π^2 wird hier auf der x–Achse aufgetragen, π^e auf der y–Achse!

Da der Wert der (Nutzen-)Funktion konstant ist, beschreibt
$U(\pi^e, \sigma_\pi^2) = c$ eine (implizite) Funktion in 2 Variablen, π^e und σ_π^2.

Da wir die $\sigma_\pi^2 \times \pi^e$–Ebene zugrunde legen, sehen wir π^e als Funktion von σ_π^2 an: $\pi^e = \pi^e(\sigma_\pi^2)$.

Lage:
Ein höheres π^e bei konstantem σ_π^2 erzeugt einen höheren Nutzen, da $U_1 > 0$ ist.
Daher verschieben sich die Indifferenzkurven bei steigendem Nutzen nach links oben.

Steigung und Krümmung der Indifferenzkurve

Steigung:
Für die Steigung dieser Kurve erhalten wir:

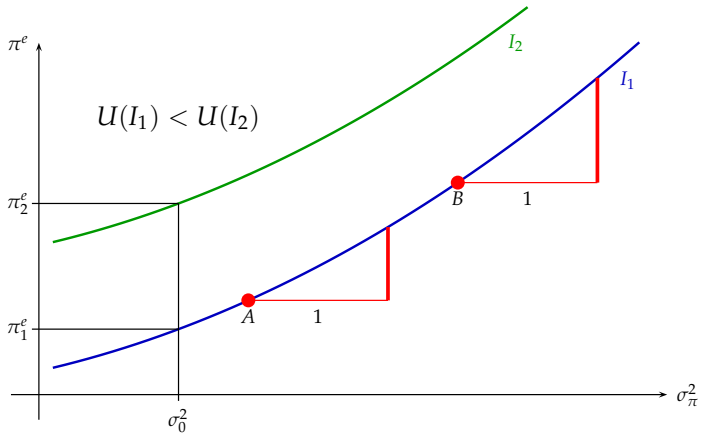
$$\frac{d\pi^e}{d\sigma_\pi^2} = -\frac{U_{\sigma_\pi^2}}{U_{\pi^e}} = -\frac{U_2}{U_1} = -\frac{(-)}{(+)} = (+)$$

- Unsere Indifferenzkurven steigen für jede Wahl von c.
- Steigt σ_π^2, das Risiko, so muss das ein höheres π^e ausgleichen.

2. Ableitung:
Die zweite Ableitung der Indifferenzkurven ist durch die Angaben der Vorzeichen von U_1, U_2, U_{11}, U_{22} noch nicht bestimmt.

Unter Risikoaversion folgt, dass sie konvex bez. der „Risiko-“σ^2–Achse sein müssen.

Indifferenzkurve bei Risikoaversion



Investor verlangt in B eine größere Rendite für den gleichen Zuwachs an Risiko als in A.

Intertemporaler Nutzen

Einige ökonomische Modelle gehen davon aus, dass ein Investor seinen Nutzen nur aus seinem Konsum, C, gewinnt.

$$U = U(C_t), \quad U'(C_t) > 0, \quad U''(C_t) < 0$$

t ist ein Zeitindex: $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
Die Nutzenfunktion ist ähnlich der risikoaversen.

Die allgemeine **intertemporale** Lebensnutzenfunktion ist

$$U_N = U(C_t, C_{t+1}, \ldots, C_{t+N})$$

N ist das (fixe) Lebensalter.

Separable Nutzenfunktion

Mathematisch einfacher ist die additiv separable Funktion mit einer konstanten, subjektiven Diskontrate $0 < \delta < 1$:

$$U_N = U(C_t) + \delta\, U(C_{t+1}) + \ldots + \delta^n\, U(C_{t+N})$$

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

- r ist die subjektive **Zeitpräferenzrate**.
  (Meist ähnlich dem Marktzinssatz.)
- Der Nutzen in verschiedenen Perioden ist geeignet diskontiert direkt vergleichbar.

$U(C) = a\, C^{1-d}$

Eine einfache Form (vom Cobb-Douglas-Typ) mit $a > 0$ und $0 < d < 1$ ist:

$$U(C_t) = a\, C_t^{1-d}$$

$U'(C_t) = a\,(1-d)\, C_t^{-d}$
$U''(C_t) = -a\,(1-d)\, d\, C_t^{-d-1}$
$U(C_t) > 0, \qquad U'(C_t) > 0, \qquad U''(C_t) < 0$

$U = C_0^{\alpha_1} C_1^{\alpha_2}$

Eine andere einfache Form (vom Cobb-Douglas-Typ) mit $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ (meist $\alpha_2 < \alpha_1$) ist:

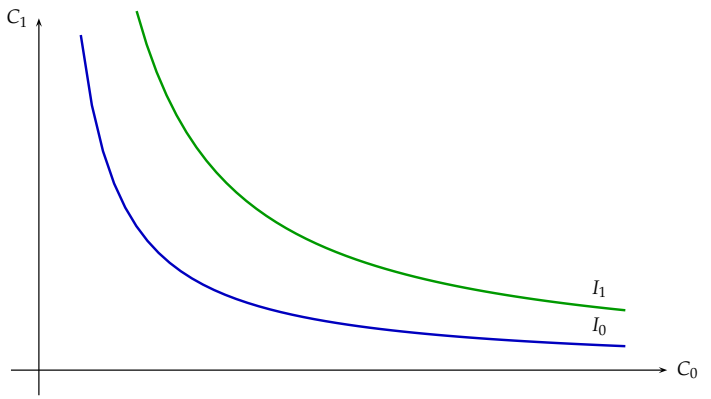
$$U = C_0^{\alpha_1} C_1^{\alpha_2}$$

Sie wird durch Logarithmierung separabel:

$$\ln(U) = \alpha_1 \ln(C_0) + \alpha_2 \ln(C_1)$$

Die Indifferenzkurven können hier explizit angegeben werden; z.B. in der $C_0 \times C_1$–Ebene.
Sei $\bar{U}$ das fixierte Nutzenniveau, $\bar{U} = C_0^{\alpha_1} C_1^{\alpha_2}$, dann kann nach C_1 aufgelöst werden: $C_1 = \bar{U}^{\frac{1}{\alpha_2}} C_0^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = (+) \frac{1}{C_0^{\alpha_1/\alpha_2}}$

Intertemporale Indifferenzkurven / Beispiel



Anwendungen: Mehrperioden-Investitionsentscheidungen, Mehrperioden-Konsumentscheidungen, Portfoliowahl.

Grenzrate der Substitution

Die Grenzrate der Substitution des zukünftigen für den laufenden Konsum ist

$$\left.\frac{dC_1}{dC_0}\right|_{U=\bar{U}}$$

Der aktuelle Konsum ist C_0, der zukünftige C_1.
Die Grenzrate gibt den Wert einer zusätzlichen Einheit vom heutigen Konsum in Einheiten des zukünftigen an.
Sie ist die **Steigung der Indifferenzkurve** mit dem Niveau $\bar{U}$.

Beispiel: $U = C_0^{\alpha_1} C_1^{\alpha_2}$

$$\left.\frac{dC_1}{dC_0}\right|_{U=\bar{U}} = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_2})\, \bar{U}^{1/\alpha_2}\, \frac{1}{C_0^{\alpha_1/\alpha_2+1}}$$