Kapitel 7

Implizite Funktionen

Lernziele

- Explizit und implizit gegebene Funktion
- Existenz lokal expliziter Funktionen
- Differentiation impliziter Funktionen

Explizite und implizite Funktion

Der Zusammenhang zwischen zwei Variablen x und y kann gegeben werden durch eine

explizite Funktion:	**implizite** Funktion:
$y = f(x)$	$F(x, y) = 0$
Beispiel:	Beispiel:
$y = x^2$	$y - x^2 = 0$
existiert nicht	$x^2 + y^2 - 1 = 0$

Fragen:

- Wann kann man eine implizite Funktion (*lokal*) auch als explizite Funktion darstellen?
- Wie lautet die Ableitung von y nach der Variable x?

Fall: Lineare Funktion

Im Falle einer linearen Funktion $F(x,y) = ax + by$ sind beide Fragen leicht zu beantworten:

$$ax + by = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x \qquad \textbf{(falls } b \neq 0\textbf{)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Ableitung einer impliziten Funktion

Wir wollen $\frac{dy}{dx}$ ausrechnen.

Anstatt die (unbekannte) Funktion $y = y(x)$ abzuleiten, können wir $F(x,y)$ betrachten. Wir verändern x um Δx:

alte Stelle	neue Stelle	Veränderung
x	$x + \Delta x$	Δx
$F(x,y)$	$F(x+\Delta x, y)$	$F(x+\Delta x, y) - F(x,y)$

Da $F(x,y) = 0$ gilt, muss diese Änderung durch eine Veränderung von y wieder kompensiert werden:

$$F(x+\Delta x, y) - F(x,y) = -[F(x, y+\Delta y) - F(x,y)]$$

Ableitung einer impliziten Funktion / (2)

Wir erweitern auf beiden Seiten

$$\frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}\,\Delta x = -\frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}\,\Delta y$$

Grenzübergang ergibt partielle Ableitungen

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx = -\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy \qquad \text{bzw.} \qquad F_x\,dx = -F_y\,dy$$

Umformung liefert

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Ableitung einer impliziten Funktion / Beispiel

Gesucht ist die implizite Ableitung $\frac{dy}{dx}$ von

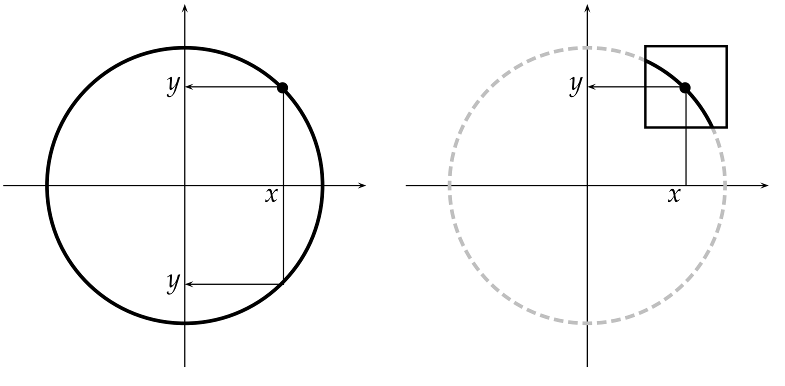
$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Wir können auch die Ableitung von x nach der Variable y ausrechnen:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}$$

Lokale Existenz einer expliziten Funktion



$y = y(x)$ existiert lokal, genau dann wenn $F_y \neq 0$.