

Monotonie und Krümmung

Lernziele

Monotonie und Krümmungsverhalten von Funktionen in einer Variablen

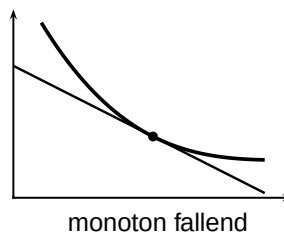
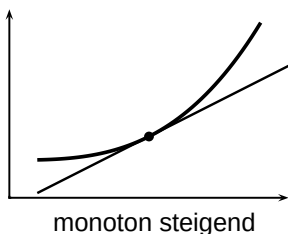
- Monotone Funktionen
- Konkave und konvexe Funktionen
- Monotonie, Krümmung und Ableitungen

Monotonie

Eine Funktion f heißt **monoton steigend** (fallend), falls

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2))$$

$$\begin{aligned} f \text{ monoton steigend} &\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ f \text{ monoton fallend} &\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Krümmung (Konvexität und Konkavität)

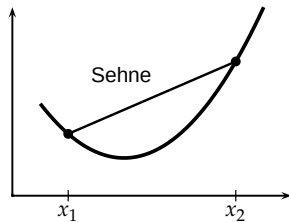
Eine Funktion f heißt **konvex**, wenn

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \leq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$

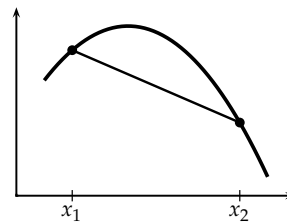
für alle x_1, x_2 und alle $h \in [0, 1]$.

Sie heißt **konkav**, wenn

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \geq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$



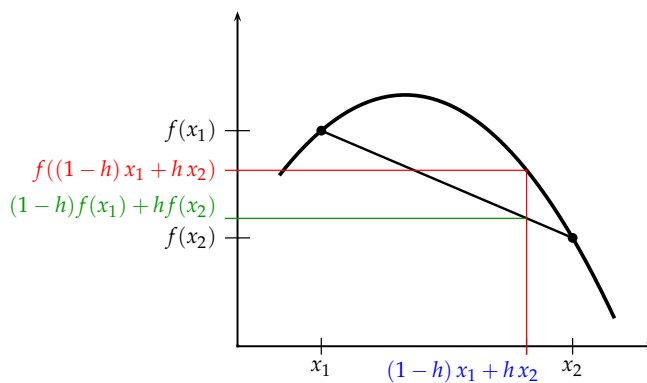
konvex



konkav

Konkave Funktion

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \geq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$



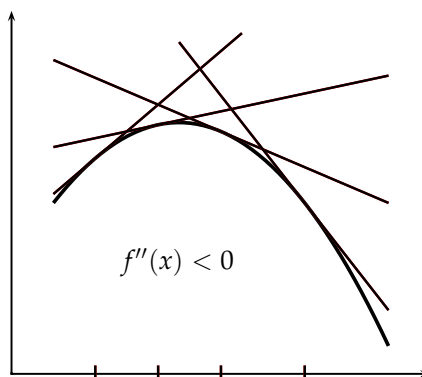
2. Ableitung einer Funktion

Die **zweite Ableitung** von $f, f''(x_0)$, ist die Ableitung der ersten Ableitungsfunktion, d.h. sie gibt die Steigung der ersten Ableitung an der Stelle x_0 an.

Ist die zweite Ableitung

- positiv, $f''(x) > 0$, so steigt dort die erste Ableitung:
eine stark negative Steigung wird weniger (wenn x größer wird)
negativ oder positiv, eine positive Steigung wird stärker positiv.
- negativ, $f''(x) < 0$, so fällt dort die erste Ableitung:
eine stark positive Steigung wird weniger positiv oder negativ, eine
positive Steigung wird schwächer positiv.

Ableitung einer konkaven Funktion



Konvexität und Konkavität

Einfacher für differenzierbare Funktionen:

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ konkav} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Eine Funktion kann auch auf einem bestimmten Intervall konkav, auf einem anderen konvex sein. Sie wird dann als **lokal** konkav, bzw. lokal konvex auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Streng konvex / konkav

Wir werden im Folgenden stets den Begriff der **strengen** Konvexität und Konkavität verwenden:

$$f \text{ streng konvex} \Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ streng konkav} \Leftrightarrow f''(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Zur Erinnerung: Hinreichende Bedingung für lokale Extremwerte:

Sei x_0 ein stationärer Punkt von f (d.h. $f'(x_0) = 0$) dann gilt:

- x_0 ist ein lokales Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$ (streng konvex).
- x_0 ist ein lokales Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$ (streng konkav).

Konvex / Beispiel

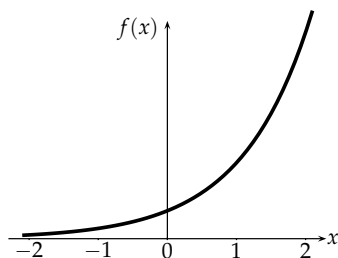
Exponentialfunktion:

$$f(x) = \exp(x)$$

$$f'(x) = \exp(x)$$

$$f''(x) = \exp(x) > 0$$

$\exp(x)$ ist (streng) konvex.



Konkav / Beispiel

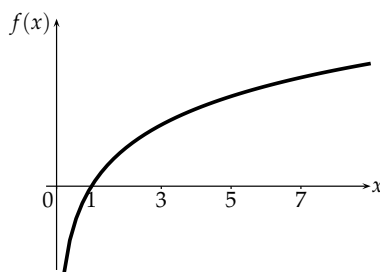
Logarithmus: ($x > 0$)

$$f(x) = \log(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$\log(x)$ ist (streng) konkav.



$\log(x)$ ist hier stets der *natürliche* Logarithmus.