Kapitel 4

Versicherungsmathematik

Lernziele

- Sterbetafel, Überlebenswahrscheinlichkeiten, Mittlere (Rest-)Lebensdauer
- Zeitrente
- Lebensversicherung
- Ablebensversicherung
- Erlebensversicherung
- (Sachversicherung wird nicht behandelt)

Wirtschaftliche Bedeutung

Anteil am veranlagten Barvermögen in Österreich:

	1970	1995	2003
Bargeld/Spareinlagen	77%	59%	49%
Wertpapiere	12%	23%	23%
Pension/Lebensversicherung	3%	13%	19%
sonstige	8%	5%	9%

Gesamtvolumen 2003:

Prämien: 13,2 Mrd. €

Versicherungsleistung: 9,7 Mrd. €

versicherungstechnische Rückstellung: 50,2 Mrd. €

Versicherung: Definition

Versicherung (*Assekuranz)* ist,

- die gegenseitige Deckung
(im Gegensatz zur „Selbst“versicherung)
- eines im einzelnen zufälligen im ganzen aber schätzbaren
(im Sinne einer ZV mit bekannter Verteilung)
- durch eine Vielzahl gleichartig bedrohter Wirtschaftseinheiten.
(dadurch wird i.a. die Verteilung bekannt)

Sterbetafel / Notation

Die Versicherungsmathematik verwendet eigene Bezeichnungen.

x	Anzahl der vollendeten Jahre (Alter abgerundet).
l_x	Anzahl der Personen des Alters x (Anz. der Pers, die mindestens x Jahre alt geworden sind, bezogen auf $l_0 = 100\,000$.)
$d_x = l_x - l_{x+1}$	Anzahl der Personen, die zwischen dem Alter x und $x+1$ sterben.
$d_{x+n} = l_{x+n} - l_{x+n+1}$	Anzahl der x-jährigen, die zwischen dem Alter $x+n$ und $x+n+1$ sterben.

l steht für „*life*“, d für „*death*“.

Sterbetafel 1990/92 für Österreich

	Männer		Frauen	
x	l_x	d_x	l_x	d_x
0	100 000	847	100 000	671
1	99 153	54	99 329	51
2	99 099	45	99 278	41
3	99 054	37	99 237	32
4	99 017	31	99 205	24
...	...		...	
19	98 468	148	98 942	40
20	98 319	144	98 902	40
21	98 175	135	98 862	38
...	...		...	

(Q: ÖSTAT)

Lebensalter

Wir betrachten eine zufällig ausgewählte Person.
Aus der Sicht einer Versicherung ist das **Lebensalter L**, das diese Person erreichen wird, eine Zufallsvariable.
Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mindestens k Jahre alt wird, beträgt

$$\mathrm{P}(L \geq k) \approx \frac{l_k}{100\,000}$$

Das „$\approx$“ Zeichen zeigt an, dass die Werte l_k empirisch in einem bestimmten Jahr erhoben wurden. Diese Werte unterliegen Veränderungen und Schwankungen. Z.B.:

- Jahre sind unterschiedlich: heißer Sommer / kühler Sommer,
- Geburtenschwache Jahrgänge,
- Steigende Lebenserwartung, etc.

Restliche Lebensdauer

Unsere zufällig ausgewählte Person ist heute x Jahre alt ist. Dann ist auch die **restliche Lebensdauer R_x** dieser Person eine Zufallsvariable.

$$R_x = L - x \quad \text{bzw.} \quad L = x + R_x$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person noch mindestens k Jahre lebt, insgesamt also mindestens $x + k$ Jahre alt wird, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}(R_x \geq k) = \mathrm{P}(L \geq x + k | L \geq x) \approx \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Bemerkung: Es gilt immer $l_x > l_{x+k}$.

Sterbetafel: Wahrscheinlichkeit p_x

Die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(R_x \geq k)$, dass eine x-jährige Person in k Jahren noch lebt, wird mit $_k p_x$ bezeichnet.

$$_k p_x = \mathrm{P}(L \geq x + k | L \geq x) \approx \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Für $k = 1$ schreiben wir $p_x = {_1 p_x} \approx \frac{l_{x+1}}{l_x}$.

$$_k p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1}$$

Sterbetafel: Wahrscheinlichkeit q_x

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person in k Jahren nicht mehr lebt, wird mit ${}_kq_x$ bezeichnet.

$$ {}_kq_x = \mathrm{P}(R_x < k) = 1 - {}_kp_x \approx 1 - \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} $$

Für $k = 1$ schreiben wir

$$ q_x = {}_1q_x = 1 - p_x \approx \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} $$

Beispiel

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein 60-jähriger Mann in 1, 3 oder 10 Jahren noch lebt beträgt:

- ${}_1p_{60} = \frac{l_{60+1}}{l_{60}} = \frac{82\,294}{83\,586} = 0.9845$
- ${}_3p_{60} = \frac{l_{63}}{l_{60}} = \frac{79\,400}{83\,586} = 0.9499$
- ${}_{10}p_{60} = \frac{l_{70}}{l_{60}} = \frac{65\,781}{83\,586} = 0.78698$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein 60-jähriger Mann in 1, 3 oder 10 Jahren nicht mehr lebt beträgt:

- ${}_1q_{60} = \frac{l_{60}-l_{60+1}}{l_{60}} = \frac{83\,586-82\,294}{83\,586} = 0.01545$
- ${}_3q_{60} = \frac{l_{60}-l_{63}}{l_{60}} = \frac{83\,586-79\,400}{83\,586} = 0.05008$
- ${}_{10}q_{60} = \frac{l_{60}-l_{70}}{l_{60}} = \frac{83\,586-65\,781}{83\,586} = 0.21301$

Sterbetafel / Diskussion

Die Sterbetafel geht davon aus, dass ein Neugeborener vor 50 Jahren die selbe Lebenserwartung besitzt wie ein Neugeborener, der heute auf die Welt kommt. Medizinischer Fortschritt, geänderte Ernährung, etc. werden nicht berücksichtigt.

Es zählt nur das bereits erreichte Alter, nicht aber das konkrete Geburtsjahr.

Alternativen sind Sterbetafeln für jedes Geburtsjahr. Dafür fehlen aber die Beobachtungen. Daher können sie nur unter bestimmten Annahmen hochgerechnet werden.

Sterbetafel: Wahrscheinlichkeit ${}_kp_x\, q_{x+k}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person noch k, aber nicht mehr als $k+1$ Jahre lebt (d.h., dass sie zwischen $x+k$ und $x+k+1$ stirbt), beträgt ${}_kp_x\, q_{x+k}$.

$$\boxed{{}_kp_x\, q_{x+k} \approx \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}}$$

$$\begin{aligned}
{}_kp_x\, q_{x+k} &= \mathrm{P}(L = x+k | L = x) \\
&= \mathrm{P}(L \geq x+k | L = x) \cdot \mathrm{P}(L < x+k+1 | L = x+k) \\
&= \frac{l_{x+k}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}}\right) = \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+k}} \\
&= \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}
\end{aligned}$$

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- ein 50jähriger Mann noch mindestens 1 Jahr lebt?
  ${}_1p_{50} = \frac{l_{50+1}}{l_{50}} = \frac{91\,350}{91\,899} = 0.994026$
- eine 70jährige Frau noch höchstens 5 Jahre lebt?
  ${}_6q_{70} = \frac{l_{70} - l_{70+6}}{l_{70}} = \frac{82\,461 - 70\,668}{82\,461} = 0.14301$
- ein 85jähriger Mann noch genau 2 Jahre lebt?
  ${}_2p_{85}\, q_{87} = \frac{d_{85+2}}{l_{85}} = \frac{l_{85+2} - l_{85+2+1}}{l_{85}} = \frac{14\,003 - 11\,528}{19\,738} = 0.125$

(laut Sterbetafel 1990/92 für Österreich)

Mittlere Lebensdauer

Der Erwartungswert der restlichen Lebensdauer einer x-jährigen Person, $\mathrm{E}(R_x)$, ist

$$\mathrm{E}(R_x) \approx \mathrm{E}(\hat{R}_x) + 1/2 = \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_kp_x\, q_{x+k}$$

$1/2$ wird addiert, da die Personen, die zwischen dem k-ten und $(k+1)$-ten Jahr sterben im Mittel (etwa) $k + 1/2$ Jahre alt werden.

$$\boxed{\mathrm{E}(R_x) \approx \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k} + 1/2}$$

$\mathrm{E}(R_x)$ ist ein bedingter Erwartungswert. Er ist die Restlebenserwartung einer Person, die bereits x Jahre gelebt hat.

Mittlere Lebensdauer / Herleitung

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{R}_x) &= 1\,{}_1p_x\,q_{x+1} + 2\,{}_2p_x\,q_{x+2} + 3\,{}_3p_x\,q_{x+3} + \dots \\
&= 1\,\frac{l_{x+1}-l_{x+2}}{l_x} + 2\,\frac{l_{x+2}-l_{x+3}}{l_x} + 3\,\frac{l_{x+3}-l_{x+4}}{l_x} + \dots \\
&= \frac{1}{l_x}\left(l_{x+1} - l_{x+2} + 2l_{x+2} - 2l_{x+3} + 3l_{x+3} - 3l_{x+4} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{l_x}\left(l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{l_x}\sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}
\end{aligned}
$$

Mit der Hand ist die Berechnung der mittleren Lebensdauer mühsam. Spreadsheets (wie z.B. EXCEL) hingegen scheint dafür konzipiert worden zu sein.

Zeitrente

Der Barwert einer n Jahre lang jährlich zahlbaren vorschüssigen **Zeitrente** von 1 GE und Zinssatz (*interest rate*) i ist gegeben durch (geometrische Reihe):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = B_n = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

wobei $v = \frac{1}{1+i}$ der *Diskontfaktor* und $d = \frac{i}{1+i} = 1 - v$.

Ewige vorschüssige Rente: $\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \dfrac{1}{d}$

Nachschüssige Rente: $a_{\overline{n}|} = vB_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{1-v^n}{v}$

Zeitrente / Beispiel

Ein 60-jähriger Mann möchte bis zu seinem 90. Geburtstag jedes Jahr 10 000 € erhalten. Berechnen Sie den Wert dieser Zeitrente bei einem Zinssatz von $i = 3\%$.
(Und wir nehmen, dass an der Mann wird wirklich so alt wird.)

$$v = \tfrac{1}{1+0.03} = 0.97087$$

$$\ddot{a}_{\overline{30}|} = \tfrac{1-v^n}{1-v} = 20.18845$$

Der Wert der Zeitrente beträgt daher

$$20.18845 \cdot 10\,000 \text{ €} = 201\,885 \text{ €}.$$

Leibrente

Eine **Leibrente** ist eine Zeitrente, die bis zum Tod einer bestimmten Person gezahlt wird.

Die Dauer der Zahlungen ist eine Zufallsvariable; somit auch der davon abhängende Barwert der Leibrente.

Der Wert der Leibrente (= Nettoeinmalprämie) ist gleich dem Erwartungswert dieser Zeitrente.

Leibrente / Barwert

Vorschüssige, lebenslängliche Leibrente, jährliche Zahlung 1 GE:

- Zahlungen zu den Zeitpunkten: $0, 1, \dots, K$.
- Barwert:
$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$
- Verteilung (für x-jährige Person):
$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = P(K = k) = {}_kp_x\, q_{x+k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$
- Wert der Leibrente: **erwarteter Barwert**
$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k}$$

bzw.
$$\boxed{\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x}$$

Leibrente / Beispiel

Zinssatz: $i = 3\%$

$\ddot{a}_{30} = 24.42$
$\ddot{a}_{50} = 17.82$
$\ddot{a}_{60} = 13.78$

Wieviel „Rente“ bekommt ein 30-jähriger Mann für 100 000 €? (Zinssatz $i = 3\%$)

$$\frac{100\,000}{\ddot{a}_{30}} = \frac{100\,000}{24.42} = 4095$$

Temporäre Leibrente

Eine **temporäre Leibrente** wird nur für eine maximale Anzahl n an Jahren (Perioden) ausbezahlt.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{für } K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{für } K = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_k p_x}$$

Temporäre Leibrente für 50-jährigen Mann für maximal 10 Jahre, Zinssatz $i = 3\%$:

$$\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = \sum_{k=0}^{9} v^k \, {}_k p_{50} = 8.50$$

Aufgeschobene Leibrente

Eine m Jahre aufgeschobene, vorschüssige Leibrente mit jährlichen Zahlungen von 1 GE wird mit ${}_{m|}\ddot{a}_x$ bezeichnet.

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{für } K = 0, 1, ;m - 1 \\ v^m + v^{m+1} + \cdots + v^K & \text{für } K = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

$$\boxed{{}_{m|}\ddot{a}_x = v^m \, {}_m p_x \, \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

Um 8 Jahre aufgeschobene Leibrente für 60-jährigen Mann, Zinssatz $i = 3\%$:

$${}_{8|}\ddot{a}_{60} = v^8 \, {}_8 p_{60} \, \ddot{a}_{68} = 6.98$$

Kommutationszahlen

Bei der Berechnung von versicherungstechnischen Größen müssen oft Summen berechnet werden. Das kann durch sogenannte **Kommutationszahlen** vereinfacht werden.
Summen werden dann durch einfache Rechenoperationen ersetzt.

Beispiel: $\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$

Wir setzen $D_x = v^x l_x$ und $N_x = \sum_{i=x}^{\infty} D_i$ und erhalten $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$.

Analog:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_k p_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Kommutationszahlen / Übersicht

l_x	Zahl der Überlebenden des Alters x
$D_x = v^x l_x$	diskontierte Zahl der Überlebenden
$d_x = l_x - l_{x+1}$	Anzahl der im $(x+1)$-ten Lebensjahr verstorbenen
$C_x = v^{x+1} d_x$	diskontierte Zahl der Verstorbenen
$N_x = \sum_{i=x}^{\infty} D_i$	Summe der diskontierten Zahl der Überlebenden
$S_x = \sum_{i=x}^{\infty} N_i$	Summe der diskontierten Zahl der Überlebenden 2. Ordnung
$M_x = \sum_{i=x}^{\infty} C_i$	Summe der diskontierten Zahl der Verstorbenen
$R_x = \sum_{i=x}^{\infty} M_i$	Summe der diskontierten Zahl der Verstorbenen 2. Ordnung

Ablebensversicherung

Todesfallversicherung: Stirbt der Versicherungsnehmer während der vertraglichen Laufzeit, wird ein festgelegter Betrag (an die Erben) ausbezahlt. (Versicherungsnehmer, die nicht versterben, finanzieren die Auszahlung mit.)

- Lebenslängliche Deckung. Der Betrag 1 wird am Ende des Todesjahres ausbezahlt. Erwarteter Barwert:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_x \, q_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}$$

- n-jährige temporäre Todesfallversicherung.

$$_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Erlebensversicherung

Versicherung auf den Erlebensfall.
Falls die/der Versicherungsnehmer/in man das Alter von $x+n$ Jahren erreicht wird das Kapital von 1 ausgezahlt.
(Versicherungsnehmer, die in der Zwischenzeit versterben, finanzieren die Auszahlung mit.)

Erwarteter Barwert:

$$_nE_x = v^n \, {}_n p_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Gemischte Versicherung

Ab- und Erlebensversicherung

Das Kapital von 1 wird am Ende des Todesjahres ausbezahlt, wenn der Tod in den ersten n Jahren eintritt, andernfalls nach Ablauf der Versicherungsdauer n.

Erwarteter Barwert:

$$A_{x:\overline{n}|} = {}_nA_x + {}_nE_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Versicherungsprämie P_N

Für die Nettoprämie muss gelten:

Barwert der Einzahlungen = Barwert der Leistungen

Zwei wichtigsten Prämienarten:

- Einmalzahlung am Beginn der Versichung (NEP).
- Vorschüssige (jährliche) laufende Zahlungen: **(temporäre) Leibrente**.

Versicherungsprämie P_N / Beispiel

Todesfallversicherung, befristet auf n Jahre für eine x-jährige Person, mit Versicherungssumme C:

$$C\,{}_nA_x = P_\mathrm{N}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Jährliche Nettoprämie P:

$$P_\mathrm{N} = C\,\frac{{}_nA_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = C\,\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Beispiel:
Todesfallversicherung, befristet auf 10 Jahre für einen 40-jährigen Mann, mit Versicherungssumme 100 000 € (Zinssatz 3%):

$$P_\mathrm{N} = 100\,000\,\frac{M_{40} - M_{50}}{N_{40} - N_{50}} = 10^5\,\frac{11\,010.30 - 10\,076.43}{627\,605.19 - 373\,763.99} = 367.90\,€$$

Bruttoprämie

Folgende weiteren Kosten müssen zur Berechnung der Bruttoprämie berücksichtigt werden:

- α Abschlusskosten bei Versicherungsbeginn
- β Verwaltungskosten während der Zahlungsdauer der Beiträge
- γ Verwaltungskosten während der gesamten Versicherungsdauer
- σ Sicherheitszuschläge

Gebräuchlichstes Verfahren:

$$\text{Bruttoprämie } P_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{N}} + P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + P_\sigma$$

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \alpha \\ P_\beta &= \beta\, P_{\mathrm{B}} \\ P_\gamma &= \gamma \\ P_\sigma &= \sigma\, P_{\mathrm{B}} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad P_{\mathrm{B}} = \frac{P_{\mathrm{N}} + \alpha + \gamma}{1 - \beta - \sigma}$$

Bruttoprämie / Beispiel

Gemischte Versicherung:

$$P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta\, P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} + \gamma\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

(Sicherheitszuschlag durch vorsichtige Wahl der Rechnungsgrundlagen)

Deckungskapital ${}_tV$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind Barwert der Leistungen und Barwert der Zahlungen gleich.

In der Regel verändert sich diese Bilanz für $t > 0$:
Es entsteht eine Differenz!

Diese Differenz ist wieder eine Zufallsgröße:

(Netto-) Deckungskapital ${}_tV$

Rückkaufwert RW

Der **Rückkaufwert** ist der Betrag, den der Versicherungsnehmer bei Kündigung des Versicherungsvertrags zurückerstattet bekommt.

Wert der Versicherung bei Kündigung (Deckungskapital) minus Stornoabzug.
(Verluste im Portfeuille, zusätzliche Verwaltungskosten, reduzierte Kapitalerträge auf Grund der nötigen erhöhten Liquiditätserhaltung, etc.)

$$RW < {}_tV$$

Risikoabschätzung – Ganz einfaches Beispiel

Bei einer Versicherung gibt es 10 000 Versicherungsnehmer, die alle eine einjährige Ablebensversicherung mit einer Versicherungssumme von 100 000 € abgeschlossen haben.
Das Sterberisiko betrage bei allen versicherten Personen 0.1%.
(Es ist zu erwarten, dass circa 10 Personen sterben.)

Wie groß ist das Risiko bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 15, 25 bzw. 100 Personen sterben?

Mathematische Formulierung:
$X \ldots$ Anzahl der verstorbenen Versicherungsnehmer

$P(X > 15) =$?, $P(X > 25) =$?, $P(X > 100) =$?

$\Rightarrow$ Binomialverteilung
(wird mittels Normalverteilung approximiert)

Weiterführende Literatur

- Milbrodt, Hartmut, und Helbig, Manfred (1999): *Mathematische Methoden der Personenversicherung*, de Gruyter, Berlin, New York
- Gerber, Hans (1986): *Lebensversicherungsmathematik*, Springer, Berlin
- Bosch, Karl (1990): *Finanzmathematik*, Kapitel 7 (Versicherungsmathematik), Oldenbourg, München.
- Grundmann, Wolfgang (1986): *Finanz- und Versicherungsmathematik*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart