Kapitel 2

# Wahrscheinlichkeitstheorie



## Lernziele

- Experimente, Ereignisse und Ereignisraum
- Wahrscheinlichkeit
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Stochastische Unabhängigkeit
- Satz von totalen Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes



## Problem

- **Problem 1:**
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen einer Münze „Kopf" kommt?

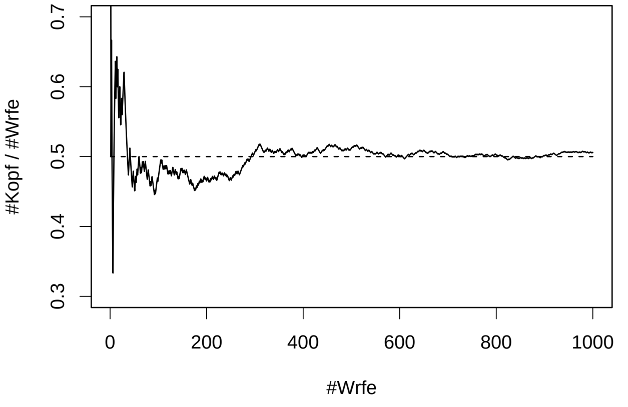
  Verwenden Sie eine Skala von

  **0 („sicher nicht")** bis **1 („sicher")**.

- **Problem 2:**
  Werfen Sie nun eine Münze zweimal!

  Haben Sie genau einmal „Kopf" und einmal „Zahl" geworfen?

# Wiederholungen des Münzwurfs






# Experiment und Ereignis

- **(Zufalls-) Experiment**
  - Ein Verfahren um eine Beobachtung zu erhalten.
  - Spezifikation des Merkmals:
    Was interessiert mich an dem Experiment?
    Was wird beobachtet?
- **Ereignis**
  - Ein mögliches Ergebnis eines Experiments.
  - Ereignisse werden mit Großbuchstaben, $A$, $B$, $C$, . . . , bezeichnet.
- **Elementarereignis**
  - Elementares (einfachstes) Ergebnis eines Experiments.
- **Ereignisraum ($S$)**
  - Menge aller möglichen Elementarereignisse.



# Experimente / Beispiel

- **Experiment:**
  Ziehe Spielkarte. Beobachte Farbe und Typ der Karte.
- **Elementarereignisse:** Herz-2, . . . , Pik-König, Pik-Ass .
- **Ereignisse:**
  „schwarze Karte“, „As“, „Herz-König“, „Pik“, „Bild“, „rote 5“, . . . .
- **Ereignisraum:** Alle möglichen Kombinationen von Karten.

# Experimente / Beispiel

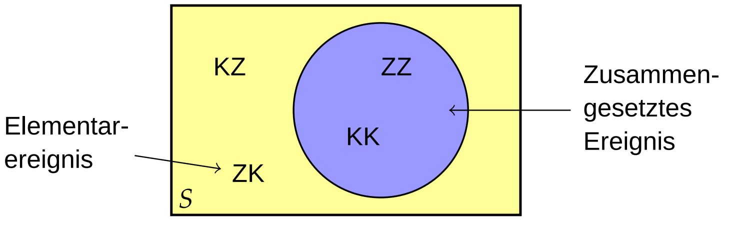
- **Experiment:**
  Werfe 2 Münzen. Beobachtet wird Kopf/Zahl.
- **Elementarereignisse:** KK, KZ, ZK, ZZ
- **Ereignisse:**

| (Zusammengesetztes) Ereignis | Menge der zugehörigen Elementarereignisse |
|---|---|
| Ereignisraum | KK, KZ, ZK, ZZ |
| 1 Kopf und 1 Zahl | KZ, ZK |
| Kopf auf 1. Münze | KK, KZ |
| zumindest einmal Kopf | KK, KZ, ZK |
| Kopf auf beiden Münzen | KK |



# Venn-Diagramm

**Experiment:** Werfen von 2 Münzen. Beobachtet wird Kopf/Zahl.




Ereignisraum: $S = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$

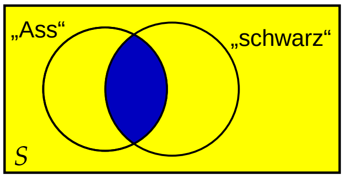


# Zusammengesetzte Ereignisse

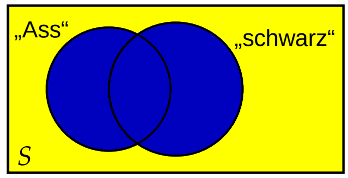
Zusammengesetzte Ereignisse erhält man durch Bildung von

- **Durchschnitt**
  - Alle Elementarereignisse, die in beiden Ereignissen $A$ **und** $B$ enthalten sind.
  - Symbol: $\cap$ (d.h., $A \cap B$)
- **Vereinigung**
  - Alle Elementarereignisse, die in Ereignis $A$ **oder** $B$ enthalten sind.
  - Symbol: $\cup$ (d.h., $A \cup B$)
- **Komplement**
  - Alle Elementarereignisse, die in **nicht** im Ereignis $A$ enthalten sind.
  - Symbol: $\bar{A}$

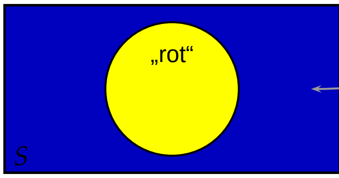
# Zusammengesetzte Ereignisse / Venn-Diagramme




Durchschnitt




Vereinigung




Ereignis: nicht-„rot“

Komplement



# Wahrscheinlichkeit

Die **Wahrscheinlichkeit** ist . . .

- Numerisches Maß für die Chance, dass ein Ereignis eintritt
  - $\mathrm{P}($Ereignis$)$, $\mathrm{P}(A)$, Probability$(A)$
- Liegt zwischen 0 (sicher nicht) und 1 (sicher).
- Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1.



# Wahrscheinlichkeiten spezieller Ereignisse

- Unmögliches Ereignis $A$
  Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 0.
  - $\mathrm{P}(A) = 0$
- Sicheres Ereignis $S$
  Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 1.
  - $\mathrm{P}(S) = 1$
- Komplementärereignis zu $A$, $\bar{A}$
  - $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$ bzw. $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\bar{A}) = 1$
- Einander ausschließende Ereignisse $A$ und $B$
  - $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$
  - $\mathrm{P}(A \cap \bar{A}) = 0$ (Gilt für jede Wahl von $A$.)

# Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten

- *A priori* Methode
- Empirische Methode
- Subjektive Methode



# *A priori* Methode

- Struktur des Experiments muß im **Vorhinein** bekannt sein.

  Beispiel: Würfeln (idealer Würfel)
  Jede Augenzahl ist gleichwahrscheinlich:
  $\mathrm{P}(\{1\}) = \mathrm{P}(\{2\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$

- Regel für gleichwahrscheinliche Elementarereignisse:

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{G}{M}}$$

  Beispiel: Würfeln (idealer Würfel)
  $\mathrm{P}(\{1\}) = \frac{G}{M} = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\mathrm{P}(\{1,2\}) = \frac{G}{M} = \frac{2}{6}$
  $\mathrm{P}(\text{Gerade Augenzahl}) = \mathrm{P}(\{2,4,6\}) = \frac{G}{M} = \frac{3}{6}$



# Empirische Methode

- Daten werden bei Experiment gesammelt.
- Auswertung:

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl mit Eigenschaft}}{\text{Anzahl der Wiederholungen}} = \frac{X}{N}}$$

  Beispiel: Ausschußwahrscheinlichkeit
  1000 Teile werden auf Fehler kontrolliert. Es werden 20 defekte Teile festgestellt.
  $\mathrm{P}(\text{„defekt“}) = \frac{X}{N} = \frac{20}{1000} = 0.02 = 2\%$

- **Annahme:** Es gibt keine Änderung der Anteile.

## Subjektive Methode

- Die Wahrscheinlichkeit wird vor dem Experiment erhoben.
- Basiert auf individuellem Wissen, Erfahrung.
- Die Antwort unterscheidet sich je nachdem, wen man fragt.

Beispiele:

- Frage an den Experten:
  Wo wird der Aktienmarkt im Dezember stehen?
  $\mathrm{P}(\text{DAX} \leq 2500) = ?$
- Frage an den Fußballfan:
  Wer wird nächster Fußballmeister?
  $\mathrm{P}(\text{X wird Meister}) = ?$

  (Wettbüros „messen“ subjektive Wahrscheinlichkeiten.)



## Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten / Beispiel

Welche Methoden sind auf folgende Problemstellungen anzuwenden?

- Werfen einer Münze
- Lotto spielen
- Aktien veranlagen
- Sportwetten
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer dieser LV die Note „Gut“ bekommt?
- *Risk Management*
- ...



## Additionsregel

- Die **Additionsregel** wird verwendet, um Wahrscheinlichkeiten von Vereinigungen von Ereignissen, $A \cup B$, zu berechnen.

$$\mathrm{P}(A \text{ oder } B) = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

- Für **einander ausschließende** Ereignisse ($\mathrm{P}(A \cap B) = 0$) gilt

$$\mathrm{P}(A \text{ oder } B) = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

# Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, **gegeben** dass ein anderes Ereignis eingetreten ist.
- Schränkt die Grundgesamtheit auf den Teil ein, der zur **neuen Information** passt. (Einige Elementarereignisse scheiden aus.)
- **Notation** und **Definition**:

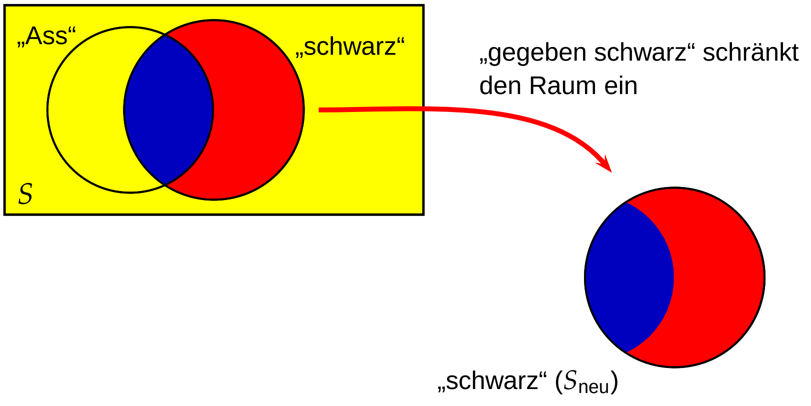
$$\boxed{\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}}$$

- **Sprechweise**:
  „Wahrscheinlichkeit von $A$ unter der Bedingung $B$“,
  „Wahrscheinlichkeit von $A$ gegeben $B$“



# Bedingte Wahrscheinlichkeit / Venn-Diagramm

**Experiment:** Ziehen einer Karte. Beobachtet wird Art und Farbe.






# Statistische Unabhängigkeit

- Das Eintreten eines Ereignisses $A$ hat keine Auswirkung auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines anderen Ereignisses $B$.
  $A$ und $B$ sind dann **(stochastisch) unabhängig**.
  - Beispiel: Werfen von 2 Münzen
    Das Ergebnis des 2. Wurfs ist vom Ergebnis des 1. Wurfs unabhängig.
- Keine Kausalität!
  (Der Storch bringt nicht die Kinder.)
- Überprüfung, ob $A$ und $B$ unabhängig sind: Es gilt

$$\boxed{\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}$$

## Multiplikationsregel

- Die **Multiplikationsregel** wird verwendet, um Wahrscheinlichkeiten von Durchschnitten von Ereignissen, $A \cap B$, zu berechnen.

$$\mathrm{P}(A \text{ und } B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B)$$

- Für **unabhängige** Ereignisse, $A$, $B$, gilt

$$\mathrm{P}(A \text{ und } B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$



## Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gegenseitig ausschließende Ereignisse, die den Ereignisraum $S$ ganz ausfüllen (*Partition*), i.e.,

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = S \quad \text{und} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Jedes beliebige Ereignis $E$ lässt sich darstellen als

$$E = (E \cap A_1) \cup \ldots \cup (E \cap A_n)$$

Nach dem Additionssatz und den Multiplikationssatz gilt

$$\mathrm{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E|A_i)\,\mathrm{P}(A_i)$$



## Satz von Bayes

Nach dem Multiplikationssatz gilt

$$\mathrm{P}(E \cap A_i) = \mathrm{P}(A_i|E)\,\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(E|A_i)\,\mathrm{P}(A_i)$$

Zusammen mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man den **Satz von Bayes**:

$$\mathrm{P}(A_i|E) = \frac{\mathrm{P}(E|A_i)\,\mathrm{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E|A_i)\,\mathrm{P}(A_i)}$$