Kapitel 11

Quantitative Finance

Lernziele für den Teil Quantitative Finance

- Die Welt der stetigen Zinsen (Renditen)
- Wichtige Finanzprodukte:
  Aktien, Währungen, Indizes und Optionen
- Bewertung von Call- und Put-Option: Black-Scholes
- Das Binomialmodell zum Simulieren von Aktienkursen und zur Berechnung des Optionspreises.
- Das stochastische Modell für Aktienkurse

Lernziele

- Zeitwert von Geld in stetiger Zeit
- Beispiel einer deterministischen Differentialgleichung
- Finanzinstrumente:
  Equities, Commodities, Währungen und Indizes
  Futures und Forwards
- Arbitragefreiheit
- Hedgen und Spekulation

Zeitwert und Arbitragefreiheit

Zwei wichtige Konzepte für Quantitative Finance:

- Der **Zeitwert** des Geldes:
  1 € heute ist mehr wert als 1 € in einem Jahr.
  Das entspricht dem Gegenwartswert-, bzw. Barwertkonzept.
- Das Fehlen von **Arbitrage**möglichkeiten:
  Mit Arbitragemöglichkeiten bezeichnen wir Portfolios, die risikolose Gewinne ermöglichen.
  Diese soll es in der Theorie nicht geben.
  (Sie werden durch den Handel an den Börsen eliminiert.)

Diskretes Zinsmodell

Diskrete Zinsen werden in der *fixed-income* Welt (Anleihen mit langer Laufzeit) verwendet.

$$M(n) = M(0) \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$$

$M(n)$ ... *Kapital (money) nach n Jahren ($n \in \mathbb{N}$)*
$M(0)$ ... *Anfangskapital*
r ... *einfacher (jährlicher) Zinssatz*
m ... *Anzahl der Verzinsungsperioden*

Stetiges Zinsmodell

Stetige Zinsen dienen als Grundlage zur Herleitung der Preisbildung für Derivative (Optionen, etc.).

$$M(t) = M(0) \cdot e^{rt}$$

$M(t)$ ... *Kapital (money) nach n Jahren ($t \in [0, \infty)$)*
$M(0)$ ... *Anfangskapital*
r ... *stetiger Zinssatz*

Die stetige Verzinsung erhält man als Grenzwert für unendlich viele Verzinsungsperioden:

$$e^r = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Durchschnittliche Verzinsung

Angenommen wir haben die jährlichen Zinssätze $r_1, r_2, \ldots, r_n$.
Wie lautet der durchschnittliche Zinssatz $\bar{r}$?

- Diskretes Zinsmodell:
  Geometrisches Mittel der Aufzinsungsfaktoren

$$(1+\bar{r})^n = (1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots\cdot(1+r_n)$$
$$\bar{r} = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot\ldots\cdot(1+r_n)} - 1$$

- Stetiges Zinsmodell:
  Arithmetisches Mittel der Zinssätze

$$e^{\bar{r}n} = e^{r_1}\cdot e^{r_2}\cdot\ldots\cdot e^{r_n}$$
$$\bar{r} = (r_1+\ldots+r_n)/n$$

Diskontieren in stetiger Zeit

Wir deponieren $M(0)$ Geldeinheiten bei einer Bank. Nach dem stetigen Zinseszinsmodell haben wir nach der Zeit t ein Guthaben von $M(t) = M(0)\,e^{r\,t}$:

- Der zukünftige Wert ist der *aufdiskontierte* heutige,
  $M(t) = M(0)\,e^{r\,t}$;
- der heutige Wert ist der *abdiskontierte* zukünftige,
  $M(0) = M(t)\,e^{-r\,t}$.

$M(T)$ Euro zum Zeitpunkt T in der Zukunft ist daher heute, zum Zeitpunkt t,

$$\boxed{M(t) = M(T)\cdot e^{-r\,(T-t)}}$$

Euro wert (Gegenwartswert, Barwert, *present value*).

Veränderung des Guthabens

Um wieviel **ändert** sich unser Guthaben mit der Zeit?

- Angenommen im Zeitpunkt t besitzen wir $M(t)$.
- Wir lassen nun eine Periode der Länge dt verstreichen.
- Wir befinden uns somit im Zeitpunkt $(t+dt)$.
  Der Wert unseres Guthabens beträgt $M(t+dt)$.
- Unsere Intuition sagt uns:
  Die Änderung unseres Guthabens ist ungefähr gleich den einfachen Zinsen $rM(t)$ mal der Länge der (kurzen!) Periode, dt.

$$dM(t) = M(t+dt) - M(t) \approx r\,M(t)\,dt$$

  Für sehr kurze Perioden dt spielen Zinseszinsen keine (große) Rolle.

Veränderung des Guthabens / (2)

Für „unendlich kleine“ Zeitschritte dt erhalten wir

$$dM(t) = r\,M(t)\,dt$$

Die Division durch dt liefert eine **gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung**.

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = r\,M(t)}$$

Die Veränderung des Guthabens ist gleich „stetiger Zinssatz mal alter Geldbestand“, wie im diskreten Modell.

Veränderung des Guthabens / (3)

Die *Lösung* der Differentialgleichung kann man intuitiv erkennen:

$$M(t) = M(0) \cdot e^{r\,t}$$

Beweis:
Wir setzen zur *Probe* in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} M'(t) = \frac{dM}{dt} &= r\,M(t) \\ M(0)\,r\,e^{rt} &= r\,(M(0)\,e^{rt}) \end{aligned}$$

Stimmt!

Differentialgleichung

- Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung, die eine Funktionen und deren Ableitung(en) enthält.
- Gesucht ist eine Funktion (die Lösung), die für alle Argumente t die DG erüllt.
- Eine Differentialgleichung gibt **nur** die Ableitung (i.e. die Steigung der Funktion an jeder Stelle t) an, aber **nicht** aber deren Lage.
- Zur eindeutigen Bestimmung der Lösung ist stets ein **Anfangswert** oder **Endwert** anzugeben.

In unserem Beispiel ist der Anfangswert $M(0)$, der Wert des Bestandes im Zeitpunkt Null.

Finanzinstrumente

Basisinstrumente der Finanzmärkte sind:

Aktien (*equity, share*), Anleihen (*bonds*), ...

Das sind Eigentumsrechte an einem kleinen Teil eines Unternehmens.

Einige Wertpapiere werden auf einer regulierten Börse (*stock exchange*) notiert, oder können frei gekauft und verkauft werden. Kapital kann so relativ einfach aufgenommen werden.

Dividenden

Der Eigentümer einer Aktie besitzt theoretisch einen Teil einer Unternehmung.

Der „Wert" einer Aktie wird i.A. für den durchschnittlichen Investor durch die Dividendenzahlungen und dem Wachstum des Wertes der Aktie bestimmt.

Dividenden sind (*lump sum*) Zahlungen, die jedes Quartal oder alle 6 Monate dem Inhaber der Aktie ausbezahlt werden.

Ob man beim Kauf einer Aktie zum Bezug der nächst fälligen Dividenden berechtigt ist, wird durch „cum" (mit) oder „ex" (ohne) bezeichnet.

Indizes

Zur Messung der Marktentwicklung werden **Indizes** konstruiert.

Ein typischer Index ist eine gewichtete Summe einer Auswahl oder einem Korb von repräsentativen Aktien.

Die Auswahl soll dabei einen

- gesamten Markt wiederzugeben:
  Der Standard & Poor's 500 (S&P500) in den USA oder
  der Financial Times Stock Exchange Index (FTSE100) in den UK, etc. oder
- einen speziellen Teil des Marktes:
  Branchenindizes.

Forwards und Futures

- Ein **Forward Kontrakt** ist eine Übereinkunft, bei der eine Partei verspricht ein Wertpapier von einer anderen Partei zu einem spezifizierten, zukünftigen Zeitpunkt um einen spezifizierten Preis zu kaufen. Kein Geld wechselt bis zum *Liefertag* (*delivery date*) bzw. *Fälligkeit* (*maturity*) des Kontrakts den Besitzer. Die Vertragsbedingungen machen den Kauf zu einer *Verpflichtung* (*obligation*).
- Ein **Future Kontrakt** ist einem *Forward* sehr ähnlich. *Futures* werden üblicherweise zu standardisierten Bedingungen an einer Börse gehandelt. Der Gewinn/Verlust aus der *Future* Position wird täglich errechnet und die Veränderung des Wertes bezahlt eine Partei der anderen. Bei *Futures* gibt es regelmäßig (Teil-)Zahlungen vom Beginn bis zur Fälligkeit.

Aktienpreise und Zufall

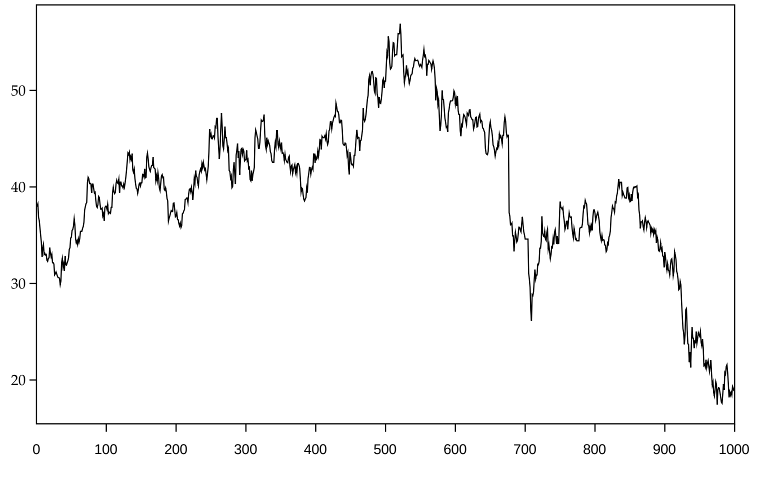
Preise von Aktien besitzen ein großes Element an Zufälligkeit.

Das heißt *nicht*, dass wir Preise nicht modellieren können.
Wir benötigen **stochastische Modelle** für

- Aktienpreis- und Renditenverlauf.
- Berechnung der durchschnittlichen Rendite und Standardabweichung.

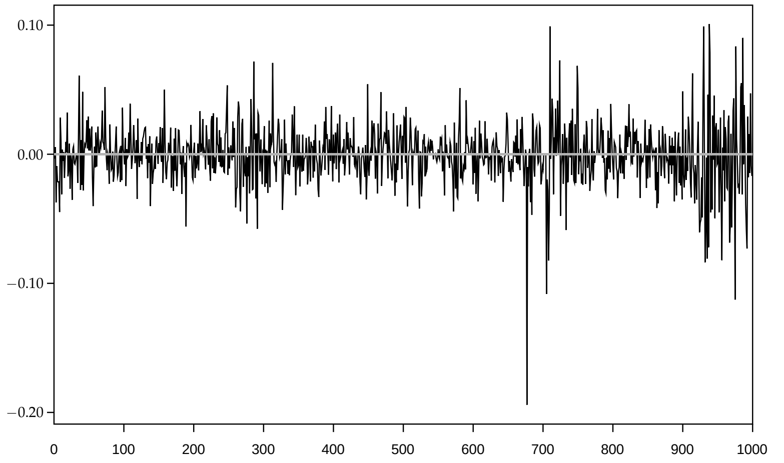
Aktienpreisverlauf

Bayer AG (7. 1. 1999 – 4. 1. 2003)



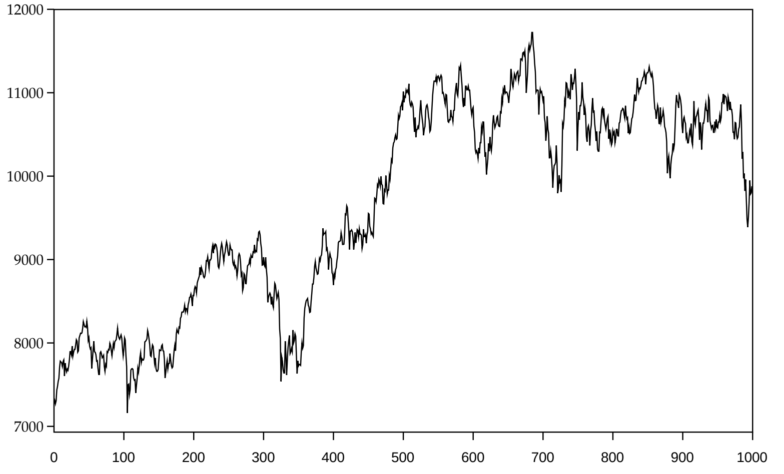
Renditenverlauf

Bayer AG (7. 1. 1999 – 4. 1. 2003)



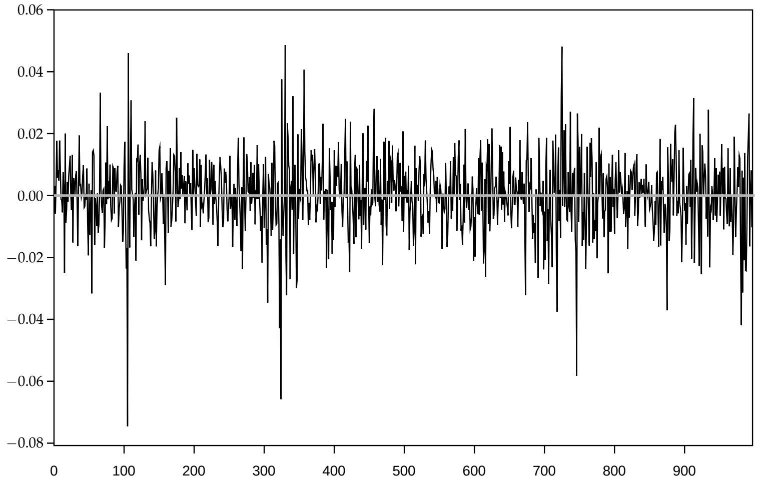
Aktienpreisverlauf

Dow Jones Industrial Index (6. 3. 1997 – 6. 3. 2001)



Renditenverlauf

Dow Jones Industrial Index (6. 3. 1997 – 6. 3. 2001)



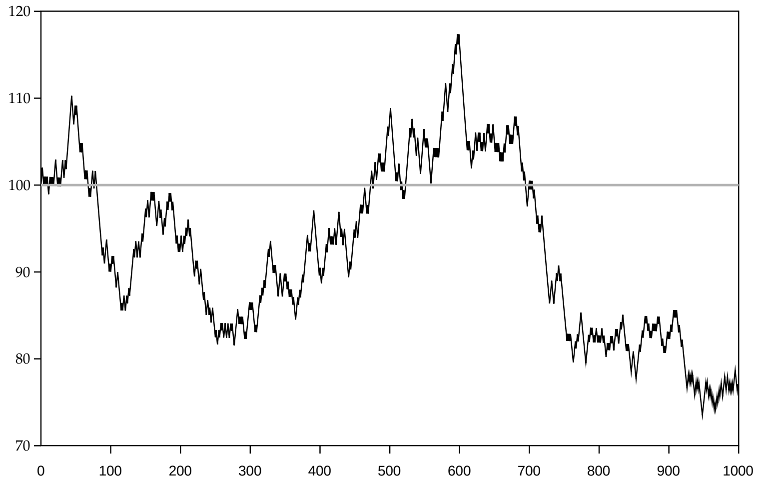
Der Binomialprozess

Der **Binomialprozess** ist ein einfacher stochastischer Prozess, der gewisse Ähnlichkeiten mit Preisprozessen von Aktien hat:

- Beginnen wir mit der Zahl 100. (Preis einer Aktie im Zeitpunkt 0)
- Nun werfen wir eine Münze.
  - Bei „Kopf“ multiplizieren wir die Ausgangszahl mit 1.01;
  - bei „Zahl“ mit 0.99.

  Nach einem Wurf ist unsere Zahl 99 oder 101.
- Werfen wir nochmals. Abhängig vom Resulat multiplizieren wir wieder mit 1.01 oder 0.99. Es gibt jetzt 3 Möglichkeiten, wobei die mittlere 2-mal auftritt:
  - 100×1.01^2,
  - $100 \times 1.01 \times 0.99$, oder
  - 100×0.99^2.

Ein generierter Preispfad



Spekulation und Hedgen

- **Spekulation**: Wenn jemand glaubt, dass die Preise steigen werden, so kann er möglicherweise davon profitieren, wenn er *Forwards* oder *Futures* kauft. Spekulation ist sehr riskant.
- **Hedging**: *Hedgen* ist das Gegenteil. Es ist die Vermeidung von Risiko.

Hedgen / Beispiel

Angenommen wir erwarten in 6 Monaten eine größere Zahlung in Yen, leben aber in den US und haben unsere Ausgaben in US Dollar zu bestreiten. Wir wollen uns absichern, so dass wir in 6 Monaten tatsächlich den vereinbarten Dollarbetrag erhalten. Dazu können wir einen *Future* Kontrakt eingehen.

Ist einmal der Wechselkurs fixiert, sind wir keinen Schwankungen des Wechselkurses Dollar/Yen mehr ausgesetzt.
(Allerdings können wir auch nicht mehr durch eine mögliche Aufwertung des Yen profitieren.)

Arbitragefreiheit

Wir betrachten einen *Forward*-Kontrakt, der uns verpflichtet F € zum Zeitpunkt T zu bezahlen, um ein zugrunde liegendes (*underlying*) Wertpapier (Basisobjekt, *asset*) zu erhalten. Heute ist der Zeitpunkt t und der Preis des Papiers ist gegenwärtig $S(t)$ €.

Wenn der Fälligkeitszeitpunkt (*maturity*) erreicht ist, bezahlen wir F € und erhalten im Gegenzug das Basisobjekt mit dem Wert $S(T)$ €.

Wieviel Gewinn wir machen, können wir nicht vor dem Zeitpunkt T wissen.

Gibt es eine Beziehung zwischen den Werten F, $S(t)$, t und T ?

Portfolio: Forward, Basisobjekt, Geld

Wir legen ein geeignetes Portfolio an:

- *Forward-Kontrakt abschließen.*
  Dieses kostet uns nichts, setzt uns aber der Unsicherheit über den Wert des Basisobjekts zum Zeitpunkt T aus.
- *Basisobjekt verkaufen.*
  Es wird als Leerverkauf (*going short*) bezeichnet, wenn wir etwas verkaufen, was wir nicht besitzen. Das ist in vielen Märkten möglich.
- *Bargeld auf die Bank legen.* (Zinssatz r)

Portfolio zur Fälligkeit

Wenn wir den Fälligkeitszeitpunkt erreichen,

- bezahlen wir den Preis F und erhalten das betreffende Basisobjekt.
- Dies schließt die short Position, unabhängig vom Preis $S(T)$.
- Zur Fälligkeit bleibt uns ein garantierte Minusposition, $(-F)$.
- Dem gegenüber steht unser garantiertes Guthaben bei der Bank, dass die anfängliche Investition von $S(t)$ mit den zusätzlichen Zinsen umfasst:

$$S(t)\, e^{r\,(T-t)}$$

Das Wort „garantiert“ ist wichtig, da es betont, dass es *unabhängig vom Wert des Basisobjekts* ist.

Spotpreis und Forwardpreis

Wir haben nun einen Betrag $S(t)$ in bar (Verkauf des Basisobjekts), einen *Forward*-Kontrakt, und eine *short* Position mit Wert $S(t)$. Unsere Nettoposition (heute) ist daher Null.

Unsere Nettoposition zur Fälligkeit T ist daher

$$S(t)\, e^{r\,(T-t)} - F$$

Unser Portfolio begann mit dem Wert Null in t, und wir enden mit einem vorhersagbarem (sicheren) Ergebnis. Wegen unserer Annahme der Arbitragefreiheit muß dieser Wert ebenfalls Null sein.

Daher gilt die Beziehung zwischen *Spot*preis und *Forward*preis

$$\boxed{F = S(t)\, e^{r\,(T-t)}}$$

Cashflow

Cashflows in einem gehedgten Portfolio einer Aktie und zugehörigem *Forward*.

Position	**Wert heute (t)**	**Wert zur Fälligkeit (T)**
Forward	0	$S(T) - F$
minus Basisobjekt	$-S(t)$	$-S(T)$
Bargeld	$S(t)$	$S(t)\, e^{r\,(T-t)}$
Gesamt	0	$S(t)\, e^{r\,(T-t)} - F$