Renditen

Lernziele

Basiskonzepte in der Finanzierung

- Renditen
- Zinseszinsrechnung
- Gegenwartswert (*PV*) auch Barwert, Kapitalwert oder Zeitwert, Endwert
- Renditen auf Aktien, Bonds und realen Kapitalanlagen
- Einfacher, effektiver Zinssatz, stetige Zinsen, interne Ertragsrate

Einfacher und effektiver Zinssatz

Im Gegensatz zum theoretischen Konzept der **(Zinses-)Zinsen** werden stets „**einfache**“ (*simple*) **Zinssätze** publiziert.

Beispiel:

Ein Zinssatz von 5%, der alle sechs Monate zu bezahlen ist, wird als „einfacher“ Zinssatz von 10% pro Jahr angegeben.

Der **effektive** Jahreszinssatz bei zwei aufeinanderfolgenden Sechs-Monatsanleihen ist durch den Zinseszinseffekt

$$(1.05)^2 = 1.1025 \quad \text{d.s.} \quad 10.25\% > 2 \times 5\% = 10\%$$

- Der einfache Zinssatz ist in diesem Beispiel 10%,
- Der **effektive** (konforme, äquivalente) Jahreszinssatz 10.25%.
- Die **Zinsperiode** ist 6 Monate.
- Die Anzahl der Zinsperioden ist 2 (pro Jahr).

Endwert und Zinseszinsen

Angenommen wir investieren am 1. Jänner x €. Wie hoch ist der **Endwert** dieser Investition nach n Jahren, wenn sich die Zinsperioden zu denen die Zinsen bezahlt werden ändern?

x sei ein Betrag, der für n Jahre mit einer Rendite R (in % pro Jahr) investiert wird.

Wenn die Zinsperioden jeweils die Länge von einem Jahr haben, und sich beginnend mit dem 1. Jänner nahtlos aneinanderreihen, so ist der zukünftige Wert (Endwert), FV_n (*future value*),

$$FV_n = x(1 + R)^n$$

Endwert und Zinsperioden

Werden die Zinsen jedoch m Mal pro Jahr bezahlt, dann ist der Endwert nach n Jahren

$$FV_n^m = x \left[\left(1 + \frac{R}{m} \right)^m \right]^n = x \left(1 + \frac{R}{m} \right)^{m \cdot n}$$

R/m wird als **Periodenzinssatz** oder „relativer“ (*periodic*) Zinssatz bezeichnet.

Formel: $a^{b^c} = (a^b)^c = a^{b \cdot c}$ falls definiert. a, b, c reell.

Beispiel:

$$5^{3^2} = (5^3)^2 = 125^2 = 15625$$

$$5^{3 \cdot 2} = 5^6 = 15625$$

Stetige Verzinsung

Wenn die Zinsperioden kürzer werden – das ist eine Erhöhung der Anzahl der Zinseszinsperioden pro Jahr – nähert sich die Verzinsung einer **stetigen** Verzinsung. Der zukünftige Wert wird zu

$$FV_n^c = \lim_{m \rightarrow \infty} x \left[\left(1 + \frac{R}{m} \right)^m \right]^n = x \exp(R)^n = x \exp(R \cdot n)$$

FV_n^c steht für Endwert bei stetiger Verzinsung (*future value in case of continuous compounding*) nach n Jahren.

Formel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \exp(x) \quad [= e^x]$$

$$\exp(x)^y = (e^x)^y = e^{x \cdot y} = \exp(x \cdot y)$$

Stetige Verzinsung / Beispiel

Der Wert von 100 € am Ende des ersten Jahres ($n = 1$) bei einem einfachen jährlichen Zinssatz R von 10% und einer Frequenz (Anzahl der Perioden pro Jahr) m .

Periodizität	m	Wert in €
jährlich	1	110.000
vierteljährlich	4	110.381
wöchentlich	52	110.506
täglich	250	110.515
stetig	∞	110.517

Zusammenhang zwischen Zinssätzen

Beziehung zwischen **einfachem** Zinssatz R , **Periodenzinssatz** R_p , **effektiven** jährlichen Rate R_f , und **stetigem** Zinssatz R_c (c wie *continuous*).

- Einfacher und Periodenzinssatz:

$$R = R_p m \quad \text{bzw.} \quad R_p = \frac{R}{m}$$

- Effektive Rate R_f durch $x(1 + R_f) = x\left(1 + \frac{R}{m}\right)^m$ implizit gegeben ($n = 1$):

$$R_f = \left(1 + \frac{R}{m}\right)^m - 1$$

Zusammenhang zwischen Zinssätzen / 2

- Der (implizite) stetige Zinssatz R_c liefert dieselbe jährliche Verzinsung wie der effektive Zinssatz:

$$x(1 + R_f) = x\left(1 + \frac{R}{m}\right)^m = x \exp(R_c) \quad (n = 1)$$

$$R_c = m \log\left(1 + \frac{R}{m}\right)$$

- Umgekehrt kann der einfache Zinssatz R durch R_c ausgedrückt werden:

$$R = m \left[\exp\left(\frac{R_c}{m}\right) - 1 \right]$$

$\log(x)$ bezeichnet stets den **natürlichen** Logarithmus.

Zusammenhang zwischen Zinssätzen / Beispiel

Eine Investition liefere alle 6 Monate einen Periodenzinssatz von 5%:

$$R_p = 0.05, \quad m = 2$$

$$R = R_p \cdot m = 0.05 \cdot 2 = 0.10$$

$$R_f = \left(1 + \frac{R}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^2 - 1 = 0.1025$$

$$R_c = m \log\left(1 + \frac{R}{m}\right) = 2 \log\left(1 + \frac{0.10}{2}\right) = 0.0976$$

- Effektive Rate größer als einfache (Zinseszinsseffekt).
(5% Zinsen der ersten Periode werden wieder mit 5% verzinst.)
- Stetiger Zinssatz kleiner als effektiver, da durch die unendlichmalige Aneinanderreihung der Perioden zusätzliche Zinseszinsen anfallen.
- Der stetige Zinssatz ist sogar kleiner als der einfache.

Barwert (Gegenwartswert, Zeitwert)

Wir investieren einen Betrag von $x \text{ €}$ mit einem sicheren, fixen, jährlichen Zinssatz $rs^{(n)}$ auf n Jahre. Der zukünftige Wert (Endwert) ergibt sich als

$$FV_n = x(1 + rs^{(n)})^n$$

Umgekehrt sind wir für eine Investition dieser Art (erhalte $FV_n \text{ €}$ in n Perioden) bereit, heute $x \text{ €}$ zu bezahlen.

Der heutige Wert von FV_n in n Perioden (**Barwert**, (diskontierter) Gegenwartswert, Kapitalwert, Zeitwert, (*discounted*) *present value*) ist daher

$$PV = \frac{FV_n}{(1 + rs^{(n)})^n}$$

$\frac{1}{(1 + rs^{(n)})^n}$ wird als Diskontfaktor oder Abzinsungsfaktor bezeichnet.

Zinsstruktur(kurve)

Betrachten den Zinsertrag für Investitionen, die unterschiedlich lange dauern, i.e., für unterschiedlich lange gebundenes Kapital.

Der Zinssatz für Investitionen mit einer Laufzeit von i Jahren bezeichnen wir mit $rs^{(i)}, i = 1, \dots, n$.

Die **Zinsstrukturkurve** (*term structure of interest*) fasst diese Zinssätze zusammen

$$\{rs^{(i)}, i = 1, \dots, n\} \quad (= \{rs^{(1)}, rs^{(2)}, \dots, rs^{(n)}\})$$

Sie gibt den Zinssatz in Abhängigkeit von der Investitionsdauer an.

$rs^{(i)}$ wird auch als **spot** Zinssatz bezeichnet:

$rs^{(1)}$ ist die Rate für Geld, das heute für ein Jahr angelegt wird,

$rs^{(2)}$ ist die Rate für Geld von Zeitpunkt 0 bis Zeitpunkt 2.

Flache Zinsstrukturkurve

Nehmen wir nun für das Folgende eine **flache** Zinsstruktur an:

$$r_s^{(i)} = r \quad \text{für alle } i.$$

Angenommen wir erhalten einen Auszahlungsstrom FV_i für die Jahre $i = 1, \dots, n$. Dann ist der Gegenwartswert PV die Summe aller Erträge abgezinst mit den Diskontfaktoren $\frac{1}{(1+r)^i}$:

$$PV = \sum_{i=1}^n \frac{FV_i}{(1+r)^i}$$

PV ist eine monoton fallende Funktion von r : (sofern alle $FV_i > 0$)

$$PV = PV(r) \quad \text{mit} \quad PV(r)' = \frac{dPV}{dr} < 0$$

Physisches Investitionsprojekt

Betrachten wir nun eine physische Investition, wie den Bau einer neuen Fabrik, von der wir Nettoauszahlungen FV_i erwarten. Angenommen die Kapitalkosten des Projekts zur Zeit $t = 0$ sind KC (*costs*).

Wir investieren, wenn der Gegenwartswert der Auszahlungen zumindest die Kosten erreicht:

$$PV \geq KC \quad \text{bzw.} \quad \text{Netto-PV} = PV - KC \geq 0$$

Interne Ertragsrate (IRR)

Steigt der Zinssatz r , so fällt der PV , wie auch der Netto- PV . Bei einem bestimmten Wert wird der Netto- PV Null. Dieser Zinssatz wird **interne Ertragsrate** IRR (*internal rate of return*) genannt.

$$\text{Netto-PV}(IRR) = 0$$

Die interne Ertragsrate kann als konstantes y aus

$$\text{Netto-PV}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{FV_i}{(1+y)^i} - KC = 0$$

numerisch berechnet werden (z.B.: Newton-Verfahren).
(Bei mehreren positiven Lösungen wird der kleinere Wert genommen.)

Interne Ertragsrate (IRR) / 2

Wir investieren, wenn

- $IRR \geq r$ und $IRR > 0$
bzw.
Interne Rate $\geq$ Rate für alternative Investitionen

oder wenn

- der PV eines Investitionsprojektes A positiv und größer ist als der PV eines Projekts B.

Gegenwartswert und Unsicherheit

Bei einer nicht-flachen Zinsstrukturkurve erhalten wir als Barwert

$$PV = \sum_{i=1}^n \frac{FV_i}{(1 + rs^{(i)})^i} = \sum_{i=1}^n \delta_i FV_i$$

mit den Diskontfaktoren

$$\delta_i = \frac{1}{(1 + rs^{(i)})^i}$$

Zukünftige Erträge sind oft mit Unsicherheit behaftet. Dieser wird durch die Einführung einer **Risikoprämie** $rp^{(i)}$ Rechnung tragen. r wird dann zu $rs^{(i)} + rp^{(i)}$ und wir erhalten die Diskontfaktoren

$$\delta_i = \frac{1}{(1 + rs^{(i)} + rp^{(i)})^i}$$

Endfällige Bonds ohne Coupons

Ein endfälliger Bond ohne Coupons hat einen fixen Tilgungskurs, M , eine bekannte Laufzeit und zahlt keine Coupons. Er wird zu einem bestimmten Preis P_t zum Zeitpunkt t gekauft, $P_t < M$.

Endfällige Bonds ohne Coupons heißen auch Zero-Coupon Bonds (*pure discount bonds, zero coupon bonds*, bei kurzer Laufzeit bis ein Jahr *bills*).

Wir investieren nun in endfällige Bonds ohne Coupons. Für eine einjährige Laufzeit erhalten wir als Ertragsrate

$$rs_t^{(1)} = \frac{M_1 - P_{1t}}{P_{1t}}$$

Endfällige Bonds ohne Coupons / 2

Aus der Sicht des PV und dem IRR ist $P_{1t} = \frac{M_1}{(1 + y_{1t})}$

nach y zu lösen: $y_{1t} = rs_t^{(1)}$.

Für einen zweijährigen endfälligen Bond finden wir

$$P_{2t} = \frac{M_2}{(1 + rs_t^{(2)})^2}$$

für den spot Zinssatz $rs_t^{(2)}$.

Die Beziehung zwischen Preis und Ertragsrate ist für Bonds invers:

Je höher der Preis P_t , desto niedriger ist die spot Rate $rs_t^{(j)}$.

Coupon Bonds

Ein Coupon Bond (Bond mit Zinsschein; kann nicht vorzeitig eingelöst werden) zahlt einen fixen Betrag C zu fixen Zeitpunkten (nehmen wir hier an jährlich), hat eine fixe Laufzeit n und einen fixen Tilgungskurs M_n . Für einen Bond mit n Jahren Laufzeit bis zur Fälligkeit sei der aktuelle Preis $P_t^{(n)}$.

Die interne Ertragsrate des Bonds, R_t^y , kann aus

$$P_t^{(n)} = \frac{C}{(1 + R_t^y)} + \frac{C}{(1 + R_t^y)^2} + \dots + \frac{C + M_n}{(1 + R_t^y)^n}$$

berechnet werden.

Halteperioden und Renditen von Aktien

Angenommen P_t ist der Preis einer Aktie zum Zeitpunkt t . Wir kaufen sie und halten sie eine Periode. Die zugehörige Rendite H_{t+1} ist dann

$$H_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} + \frac{D_{t+1}}{P_t}$$

Der erste Term ist der anteilige Gewinn/Verlust über eine Periode auf Grund der Kursänderung, der zweite der anteilige Dividendenertrag.

Ex post (im Nachhinein) sind P_{t+1} und D_{t+1} bekannt, aber **ex ante** (im Vorhinein) unsicher.

Halteperioden und Renditen von Aktien / 2

H_{t+i+1} sei die 1-Perioden Rendite zwischen $(t+i)$ und $(t+i+1)$.

$$1 + H_{t+i+1} = \frac{P_{t+i+1} + D_{t+i+1}}{P_{t+i}}$$

Eine Investition von A_t € zum Zeitpunkt t wird demnach nach n Perioden

$$A_{t+n} = A_t (1 + H_{t+1}) (1 + H_{t+2}) \cdots (1 + H_{t+n})$$

wert sein.