

Grundkurs: Mathematische Methoden

Übungsbeispiele Sommersemester 2006

Josef Leydold
Department für Statistik und Mathematik
der Wirtschaftsuniversität Wien

30. März 2006

© 2005, Josef.Leydold@wu-wien.ac.at

Renditen

1. Berechnen Sie den Endwert einer Investition von 10 000 € nach 5 Jahren mit einem Jahreszinssatz von 5%.
2. Gegeben ist der einfache Zinssatz $R = 5\%$. Berechnen Sie für verschiedene Periodenlängen (ein Jahr, halbes Jahr, viertel Jahr, ein Monat, eine Woche, ein Tag, 0 Sekunden) den effektiven Jahreszinssatz.
3. Geben Sie zum stetigen Zinssatz $R_c = 7.5\%$ den einfachen und den effektiven an, wenn $m = 4$.
4. Geben Sie den Barwert zu einer Auszahlung von 1000 € in 4 Jahren an, wenn die spot Rate für eine 4-jährige Investition 6% beträgt.
5. Suchen Sie aktuelle Daten zur Zinsstrukturkurve. Geben Sie die Quelle an, beschreiben Sie den Verlauf.
6. Sie werden in den folgenden Jahren jeweils zum 31. 12. folgende Zahlungen erhalten: 100, 150, 120, und 100 €. Geben Sie den Gegenwartswert des Zahlungsstroms bei einem festen Zinssatz von 6% an.
7. Führen Sie Aufgabe 6 mit den Zinssätzen 5% und 7% durch. Wie verändert sich der PV?
8. Berechnen Sie in einem Spreadsheet die interne Ertragsrate für den Zahlungsstrom aus Aufgabe 6 für den Fall, dass die Anfangskosten
(a) 300 (b) 400 (c) 470 (d) 500 betragen.
9. Berechnen Sie für die Auszahlungen in Aufgabe 6 den Barwert bei einer steigenden Zinsstrukturkurve:
 $rs^{(1)} = 0.05, rs^{(2)} = 0.06, rs^{(3)} = 0.065, rs^{(4)} = 0.07$
Geben Sie die Diskontfaktoren an.
10. Ein in 2 Jahren fälliger Zero-Coupon Bond hat ein Nominale von 150 €.
(a) Sein heutiger Kurs ist 120.
(b) Sein heutiger Kurs ist 140.
Wie groß ist die jährliche Rendite? Vergleichen Sie das Ergebnis von (a) mit dem von (b).
11. Ein 3-jähriger Bond mit Nominale von 100 € schüttet in den 3 Jahren Laufzeit jeweils zum 31. 12. 10 € aus. Sein heutiger Kurs beträgt 100 €. Wie groß ist die Rendite? Lösen Sie mit einem Spreadsheet.
12. Der Kurs der WU Aktie lautet am 2.1. 100 €. Am 31.12. desselben Jahres beträgt er 90 €. Als Dividende wird am Jahresende 0.05 € ausgeschüttet. Wie groß war die Rendite?
13. Die monatlichen Renditen der Aktie der 1. Wiener Hochquellwasserleitung sind

2	3	4	5	6	7
0.004	0.003	0.002	0.003	0.004	0.003
8	9	10	11	12	1
0.002	0.003	0.004	0.003	0.002	0.004

Der Kurs am 1. 2. war 345 €. Wie groß ist er am 31. 1. des Folgejahres? Wie groß ist die Jahresrendite?

Wahrscheinlichkeitstheorie

14. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln mit einem *idealen* Würfel:
- (a) die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Würfeln eine „1“ zu erhalten;
 - (b) die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten mal Würfeln eine „1“ zu würfeln.
 - (c) die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligen Würfeln jedesmal eine „1“ zu erhalten;
 - (d) die bedingte Wahrscheinlichkeit, beim zweiten mal Würfeln eine „1“ zu würfeln gegeben dass beim ersten mal ebenfalls „1“ gewürfelt wurde.
 - (e) Wahrscheinlichkeit bei zweimaligen Würfeln zweimal eine gerade Zahl zu erhalten.
 - (f) Sind die Ereignisse „beim ersten mal 1 würfeln“ und „beim zweiten mal 1 würfeln“ stochastisch unabhängig?
15. In einer Urne befinden sich 6 gelbe und 4 rote Kugeln. Es werden zwei Kugeln (ohne Zurücklegen) gezogen.
- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim ersten mal eine grüne Kugel gezogen wird.
 - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine grüne und eine gelbe Kugel zu ziehen.
 - (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim zweiten mal eine grüne Kugel gezogen wird.
 - (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim zweiten mal eine grüne Kugel gezogen wird wenn die erste gelb war.
 - (e) Sind die Ereignisse „erste Kugel gelb“ und „zweite Kugel grün“ stochastisch unabhängig?
16. Für die Produktion von Glühlampen werden zwei Produktionsschienen verwendet. Der Anteil an fehlerhaften Produkten in den Schienen 1 und 2 beträgt 5% bzw. 8%. 40% der Gesamtproduktion (inkl. Ausschuß) wird von Schiene 1 produziert.
- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gezogene Lampe defekt ist.
 - (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gezogene defekte Lampe von Schiene 2 stammt.

Zufallsvariable

17. Gegeben ist die diskrete ZV X durch ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x	$P(X = x)$
-1	0.1
0	0.3
1	0.6
Summe	1.0

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- (a) $P(X = 0)$
- (b) $P(X \geq 0)$

18. Gegeben ist die ZV X durch ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x	$P(X = x)$
-1	0.3
0	0.4
1	0.3
Summe	1.0

Die ZV Y sei definiert durch $Y = 5X + 3$.

Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für X und Y . Kommentieren Sie das Ergebnis.

19. Bei einem Multiple-Choice-Test gibt es 16 Fragen mit je 5 Antwortmöglichkeiten, wobei immer nur genau eine richtig ist. Sie kreuzen zu jeder Frage zufällig eine der Antwortmöglichkeiten an.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, keine einzige Frage richtig zu beantworten?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens die Hälfte aller Fragen richtig zu beantworten?
- (c) Wie groß ist der Erwartungswert für Anzahl der richtigen Antworten?
- (d) Wie groß ist die Standardabweichung für Anzahl der richtigen Antworten?
- (e) Sie erhalten je einen Punkt für jede richtige Antwort, für jede falsche Antwort werden 0.25 Punkte abgezogen. Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung für Ihre Gesamtpunktzahl, wenn Sie jede Antwort zufällig ankreuzen?

20. Bei einem Notruf gehen pro Stunde durchschnittlich 30 Anrufe ein.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer 10 minütigen Telefonstörung genau 10 Anrufe einlagen (und nicht entgegen genommen werden können)?
- (b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Anrufe in einem 10 minütigen Zeitintervall.
- (c) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Anzahl der Anrufe in einem 10 minütigen Zeitintervall.

21. Die Wartezeit an einem Fahrkartenschalter sei exponentialverteilt mit Erwartungswert $\mu = 5$ Minuten.

- (a) Skizzieren Sie die Dichtefunktion.
 - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde mehr als 10 Minuten warten muss.
 - (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde weniger als 20 Minuten warten muss.
- 22.** Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz einer auf $[0, 1]$ gleichverteilten stetigen Zufallsvariable.
- 23.** Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz einer exponentialverteilten Zufallsvariable.

Versicherungsmathematik

- 24.** Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten aus der Sterbetafel 1990/92 für Österreich, dass
- (a) ein 20-jähriger Mann noch mindestens 1 Jahr lebt?
 - (b) eine 20-jährige Frau noch höchstens 4 Jahre lebt?
 - (c) ein 30-jähriger Mann noch genau 3 Jahre lebt?
- 25.** Berechnen Sie die durchschnittliche Restlebensdauer
- (a) eines 85-jährigen Mannes,
 - (b) einer 85-jährigen Frau.
- 26.** Berechnen Sie den erwarteten Barwert zum Vertragsabschluss einer Erlebensversicherung mit einer Laufzeit von 3 Jahren, einer Versicherungssumme (Auszahlung) von 10 000 € und einem Zinssatz von 5% für einen 50-jährigen Mann. Wie groß ist die Nettoeinmalprämie für diese Versicherung? Wie groß ist der Barwert der Nettoprämie bei jährlichen Einzahlungen?
- 27.** Berechnen Sie den erwarteten Barwert der Einzahlungen zum Vertragsabschluss einer Ablebensversicherung mit einer Laufzeit von 3 Jahren, einer Versicherungssumme (Auszahlung) von 10 000 € und einem Zinssatz von 5% für einen 50-jährigen Mann.
- 28.** Berechnen Sie den erwarteten Barwert der Einzahlungen, wenn die Ab- und Erlebensversicherung aus Aufgaben 26 und 27 kombiniert werden. Versicherungsnehmer ist ein 50-jähriger Mann.
- 29.** Berechnen Sie die jährliche (vorschüssige) (Netto-) Prämie für die Verträge aus den Aufgaben 26 bis 28.
- 30.** Berechnen Sie die jährliche (vorschüssige) (Netto-)Prämie für eine
- (a) 10-jährige Todesfallversicherung für einen 50-jährigen Mann. ($i = 5\%$)
 - (b) für eine Todesfallversicherung.
- 31.** Berechnen Sie (mit einem Tabellenkalkulationsprogramm) die Kommutationszahlen D_x, C_x, N_x, M_x . ($i = 3\%$)
- 32.** Berechnen Sie die Bruttoprämie (jährlich vorschüssig) für eine gemischte Versicherung für einen 40-jährigen Mann, einer Laufzeit von 10 Jahren, einem Zinssatz von 3% und folgenden Kosten: $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.01$.
- 33.** Berechnen Sie mit Hilfe der Kommutationszahlen aus Aufgabe 31 den Wert einer Leibrente eines 64-jährigen Mannes bzw. einer 54-jährigen Frau.
- 34.** Berechnen Sie mit Hilfe der Kommutationszahlen aus Aufgabe 31 den Wert einer gemischten Versicherung für einen 30-jährigen Mann (Laufzeit: 20 Jahre).
- 35.** Berechnen Sie die temporäre Leibrente (Dauer 10 Jahre) für eine 55-jährige Frau
- 36.** Berechnen Sie eine 15- 25- und 35-jährige Zeitrente mit einem Zinssatz von
- (a) $i = 2,5\%$ und (b) $i = 6\%$.
- 37.** Berechnen Sie für sich den Wert einer Leibrente einer jährlich vorschüssigen Zahlung von 10 000 €. (Verwenden Sie einen vernünftigen Zinssatz)

Konkavität und Konvexität

38. Zeichnen sie die Funktionen

- (a) $f(x) = 1/x$,
- (b) $g(x) = x^2 + 1$,
- (c) $h(x) = \log(x)$,
- (d) $z(x) = x^3 - x$

soweit sie definiert sind.

Wählen sie jeweils drei interessante Punkte aus, an denen sie das lokale Krümmungsverhalten der Funktionen untersuchen.

Zeichnen sie in der Umgebung jedes ausgewählten Punktes drei Tangenten an die Funktionen und beschreiben sie deren Veränderung der Steigung.

Überprüfen sie ihr Ergebnis analytisch (rechnerisch).

39. Die Funktion

$$f(x) = b x^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Produktionsfunktion, d.h. mit x Einheiten Arbeit kann man $f(x)$ Güter produzieren.

Produktionsfunktionen haben i.a. folgende Eigenschaften:

- (1) $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- (2) $f'(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
- (3) $f''(x) < 0$

- (a) Überprüfen Sie diese Eigenschaften an der obigen Funktion.
- (b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für α und b geeignete Werte ein.)
- (c) Was bedeuten diese Eigenschaften inhaltlich?
(z.B.: Wenn $x = 0$, wird nichts produziert.)

Funktionen in mehreren Variablen

40. Gegeben ist die Nutzenfunktion U eines Haushalts bezüglich zweier komplementärer Güter, Gut 1 und Gut 2 (z.B. linker Schuh und rechter Schuh eines Paares). Skizzieren Sie das Funktionen-(Nutzen-)gebirge und zeichnen Sie die Höhenlinien (Isonutzenlinien) für $U = U_0 = 1$ und $U = U_1 = 2$ ein.

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{\min(x_1, x_2)}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Hinweis: $\min(x_1, x_2)$ ist definiert als der kleinere der beiden Werte von x_1 und x_2 . Z.B.: $\min(1, 2) = 1$.

Probieren Sie z.B. die Paare $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $\dots$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $\dots$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, $\dots$

41. Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= x + y & \text{(b)} \quad f(x, y) &= xy & \text{(c)} \quad f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ \text{(d)} \quad f(x, y) &= x^2 y^2 & \text{(e)} \quad f(x, y) &= x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0 \end{aligned}$$

Wie lauten Gradient und Hesse-Matrix an der Stelle $(1, 1)$?

42. Berechnen Sie die stationären Punkte folgender Funktionen und stellen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um (lokale) Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= -x^2 + xy + y^2 \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \frac{1}{x} \ln(x) - y^2 + 1 \\ \text{(c)} \quad f(x, y) &= 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2 \end{aligned}$$

43. Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 - e^{x_1} - e^{x_2}$$

Berechnen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion.

44. Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1)x_2 + x_3^2$$

Stellen Sie fest ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

45. (Preisdiskiminierung)

Angenommen eine monopolistische Firma produziert ein Gut und beliefert drei Märkte. Die Nachfragefunktionen in diesen Märkten seien

$$p_1 = 63 - 4q_1, \quad p_2 = 105 - 5q_2 \quad \text{und} \quad p_3 = 75 - 6q_3.$$

Dabei ist p_i der Preis und q_i die abgesetzte Menge im Markt i . Der Gesamtumsatz R der Firma ergibt sich aus den drei Einzelumsätzen:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3.$$

Die Produktionskosten C seien unabhängig vom jeweiligen Markt:

$$C = 20 + 15q = 20 + 15(q_1 + q_2 + q_3).$$

Die Firma möchte ihren Gewinn $R - C$ maximieren. Berechnen Sie die optimale Gesamtproduktion und den Umsatz in den einzelnen Märkten.

46. Gesucht sind die (lokalen) Extrema von $f(x, y) = x^2 y$ unter der Nebenbedingung $x + y = 3$.
- (a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.
 - (b) Berechnen Sie die stationären Punkte.
 - (c) Stellen Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.
47. Ein Haushalt möchte für ein bestimmtes Nutzenniveau, $U = U_0$, seine Ausgaben E minimieren. Es sei $U = U_0 = 1 = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ und $E = 4x_1 + x_2$. Berechnen Sie die optimale Konsumkombination der Gütermengen x_1 und x_2 . Wie ändern sich die Ausgaben bezüglich des Nutzenniveaus?

Implizite Funktionen

48. Berechnen Sie $\frac{dy}{dx}$ aus der impliziten Funktion $x^2 + y^3 = 0$.
Für welche Werte x existiert lokal eine explizite Funktion $y = f(x)$ (y lässt sich (lokal) durch x ausdrücken)? Für welche Werte y existiert ein Funktion $x = g(y)$?
Skizzieren Sie die implizite Funktion $x^2 + y^3 = 0$.

Erwarteter Nutzen

- 49.** Wir werfen eine perfekte Münze. Die Auszahlungen sind 2 € bzw. 0 € bei einem Einsatz von 1 €. Der erwartete monetäre Wert des (riskanten) Spiels ist 1 €, i.e. der Einsatz $((2) 1/2 + (0) 1/2 = 1)$. Der Wert dieses Spiel nicht zu spielen ist ebenfalls 1 € (der Einsatz). Spielt ein
- (a) risikoneutraler Spieler dieses Spiel?
 - (b) risikofreudiger Spieler dieses Spiel?
- 50.** Gegeben ist die Funktion $U(W) = a - b \exp(-cW)$.
- (a) Überlegen sie sich welche Bedingungen die Koeffizienten a , b , und c erfüllen müssen, damit U eine Nutzenfunktion ist.
 - (b) Unter welchen Bedingungen beschreibt sie risikofreudiges Verhalten?
 - (c) Berechnen sie die absolute Risikoaversion, $R_A(W)$.
 - (d) Berechnen sie die relative Risikoaversion, $R_W(W)$.
- 51.** Zeichnen sie die Nutzenfunktion $U(W) = a - b \exp(-cW)$ für eine Parameterkombination
- (a) $b, c < 0$, (b) $c = 0$ und (c) $b, c > 0$.
- 52.** Überprüfen sie die Bedingungen $U_1 > 0$, $U_2 < 0$, $U_{11}, U_{22} < 0$ für
- (a) $U(\pi^e, \sigma_\pi^2) = \pi^e - \frac{c}{2} \sigma_\pi^2$, $c > 0$.
 - (b) $U(\pi^e, \sigma_\pi) = \pi^e - \frac{c}{2} \sigma_\pi^2$, $c > 0$.
- 53.** Zeichnen sie eine (zwei) Indifferenzkurve(n) für $U(\pi^e, \sigma_\pi^2) = \pi^e - \frac{c}{2} \sigma_\pi^2$ mit einem geeignet gewählten c
- (a) in der $\sigma_\pi^2 \times \pi^e$ -Ebene,
 - (b) in der $\sigma_\pi \times \pi^e$ -Ebene.
- 54.** Berechnen sie die Steigung der Indifferenzkurve
- (a) in der $\sigma_\pi^2 \times \pi^e$ -Ebene für $U(\pi^e, \sigma_\pi^2) = \pi^e - \frac{c}{2} \sigma_\pi^2$ und
 - (b) in der $\sigma_\pi \times \pi^e$ -Ebene für $U(\pi^e, \sigma_\pi) = \pi^e - \frac{c}{2} \sigma_\pi^2$.

Taylorreihen

- 55.** Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term
(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung, (c) 3. Ordnung,
für die Funktion $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$. Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.
Berechnen sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen sie ihn mit den Werten der Approximation an der Stelle 2.
- 56.** Berechnen sie die Taylorreihe bis zum Term
(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung,
für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.
Berechnen sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.
- 57.** Berechnen sie die Taylorreihe bis zum Term
(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung,
für die Funktion $f(x) = \log(x)$. Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.
Berechnen sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.
- 58.** Sei $f(x) = 8 \exp\left(\frac{3}{2}x\right)$. Geben sie eine lineare Approximation für die Veränderung der Funktion, Δf , an:
(a) allgemein,
(b) an der Stelle 2,
(c) an der Stelle 2 und für $\Delta x = 1$.
- 59.** X sei normalverteilt mit $X \sim N(2, 3)$. $Y = f(X) = 8 \exp\left(\frac{3}{2}X\right)$. Geben sie die Approximationen
(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung,
für den Erwartungswert von Y nach der Delta-Methode an.

Kovarianz und Korrelation

- 60.** Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$ und $V(Y) = 2$. X und Y seien unkorreliert. Berechnen Sie $E(Z)$ und $V(Z)$ für
- (a) $Z = 3 + 2X + Y$, (b) $Z = X + Y$, (c) $Z = X - Y$.
- 61.** Gegeben sind die unkorrelierten Zufallsvariablen Z_t , $t = 1, \dots, T$, mit Erwartungswert $E(Z_t) = 0$ und Varianz $V(Z_t) = \sigma^2$. Berechnen Sie $E(\sum_{t=1}^T Z_t)$ und $V(\sum_{t=1}^T Z_t)$.
- 62.** Gegeben sind die unkorrelierten Zufallsvariablen Y_t , $t = 1, \dots, T$, mit Erwartungswert $E(Y_t) = 0.5$ und Varianz $V(Z_t) = \sigma^2$. Berechnen Sie $E(\sum_{t=1}^T Y_t)$ und $V(\sum_{t=1}^T Y_t)$.
- 63.** Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 2$ und $\text{Cov}(X, Y) = 1$.
- (a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\text{Corr}(X, Y)$.
- (b) Berechnen Sie $E(Z)$ und $V(Z)$ für
- (i) $Z = 3 + 2X + Y$, (ii) $Z = X + Y$, (iii) $Z = X - Y$.
- 64.** Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 2$, sowie
- (1) $\text{Corr}(X, Y) = -1$, (2) $\text{Corr}(X, Y) = 0$, und (3) $\text{Corr}(X, Y) = 1$.
- Berechnen Sie für (1)–(3)
- (a) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$.,
- (b) die Varianzen für
- (i) $Z = 3 + 2X + Y$, (ii) $Z = X + Y$, (iii) $Z = X - Y$.
- 65.** Wie Aufgabe 64 aber mit $V(Y) = 4$.
- 66.** Gegeben sind die Renditen R_i dreier Wertpapiere mit folgenden Erwartungswerten und (Ko-) Varianzen: $E(R_1) = 0.1$, $E(R_2) = 12$, $E(R_3) = 0.08$; $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$, $V(R_3) = 0.25$; $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0.01$, $\text{Cov}(R_1, R_3) = 0.02$ und $\text{Cov}(R_2, R_3) = -0.03$. Stellen Sie insgesamt vier Kombinationen der Form $P = \alpha R_i + (1 - \alpha) R_j$ bzw. $P = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3$ zusammen indem Sie geeignete Werte für α bzw. α_1 und α_2 wählen.
- (a) Berechnen Sie für jedes P Ihrer Wahl Erwartungswert $E(P)$ und Varianz $V(P)$.
- (b) Nach welchen Kriterien beurteilen Sie die Kombinationen.
- (c) Welcher Kombination würden Sie den Vorzug geben.
- 67.** Wir beziehen uns auf die Angabe in Aufgabe 66
- (a) Berechnen Sie die einzelnen Korrelationskoeffizienten. Wie groß ist $\text{Corr}(R_1, R_1)$?
- (b) Geben Sie die Kovarianzmatrix Σ an.
- (c) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix durchg Matrixoperationen.
- (d) Berechnen Sie die Varianzen der Kombinationen bestehend aus R_1 , R_2 und R_3 über $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, (1 - \alpha_1 - \alpha_2))'$.
- 68.** Berechnen Sie die optimale Kombination von R_1 und R_2 in Aufgabe 66.

Portfolio Management

- 69.** Gegeben sind die Renditen dreier Wertpapiere. $E(R_1) = 0.10$, $E(R_2) = 0.12$, $E(R_3) = 0.08$, $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$, $V(R_3) = 0.25$, $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0.01$, $\text{Cov}(R_1, R_3) = 0.02$, und $\text{Cov}(R_2, R_3) = -0.03$. Wir stellen ein Portfolio der Form $P = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3$ zusammen. Suchen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio unter allen Portfolios mit $E(P) = 0.11$. Ihr Optimierungsproblem lautet

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} V(P)$$

$$\text{NB: } \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1, \quad E(P) = 0.11$$

Die erste Nebenbedingung wurde durch $\alpha_3 = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)$ schon beruecksichtigt.

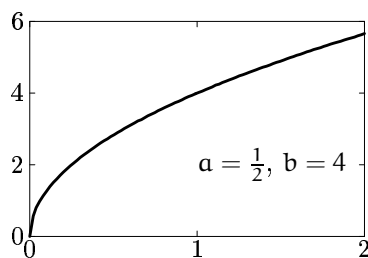
- 70.** Gegeben sind die Renditen R_1 und R_2 mit $E(R_1) = 0.10$, $E(R_2) = 0.12$, $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$. Berechnen Sie das optimale Portfolio unter
- (a) $\text{Corr}(R_1, R_2) = -1$,
 - (b) $\text{Corr}(R_1, R_2) = 0$,
 - (c) $\text{Corr}(R_1, R_2) = 1$.
- 71.** Gegeben sind die Renditen R_1 und R_2 mit $E(R_1) = 0.08$, $E(R_2) = 0.12$, $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$, und $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0.01$. Zeichnen Sie die *efficient frontier* im μ - σ -Diagramm.
(Werten Sie $E(P)$ und $V(P)$ für verschiedene α -Werte aus und tragen Sie die Paare $(\sqrt{V(P)}, E(P))$ ins Koordinatensystem ein.)
- 72.** Zeichnen Sie in Aufgabe 71 die Kapitalmarktklinie ein. Der risikolose Zinssatz sei $r = 0.06$.
- 73.** Wählen Sie nach dem Kriterium des maximalen *Sharpe ratio* das beste Portfolio auf der *efficient frontier* in Aufgabe 71.
- 74.** Gegeben ist die Beziehung $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$ aus dem CAPM. Interpretieren Sie verschiedene Werte für β_i .
(a) $\beta_i = -0.5$, (b) $\beta_i = 0$, (c) $\beta_i = 0.5$, (d) $\beta_i = 1$, (e) $\beta_i = 1.2$.
- 75.** Gegeben ist die Beziehung $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$ aus dem CAPM. Interpretieren Sie verschiedene Werte für α_i .
(a) $\alpha_i = -0.5$, (b) $\alpha_i = 0$, (c) $\alpha_i = 0.5$, (d) $\alpha_i = r + \beta_i r$, mit dem risikofreien Zinssatz r .

Lösungen

1. 12 762.82 €.
2. 1 Jahr: 5%, 1/2 Jahr: 5.0625%, 1/4 Jahr: 5.0945%, 1 Monat: 5.1162%, 1 Tag: 5.1266%, stetige Verzinsung: 5.1271%.
3. $R = 7.5708\%$, $R_f = 7.7884\%$.
4. 792.09 €.
6. 407.80 €.
7. 5%: 417.22 €; 7%: 398.72 €.
8. (a) 20.908%; (b) 6.857%; (c) 0%; (d) -2.462%.
9. Diskontfaktoren: $\delta_1 = 0.95238$, $\delta_2 = 0.89000$, $\delta_3 = 0.82785$, $\delta_4 = 0.76290$; $PV = 404.369$ €.
10. (a) 11.803%; (b) 3.510%.
11. 10%.
12. -9.95%.
13. Jahresrendite: 3.763%; Aktienkurs: 357.98 € (Annahme: keine Dividendenaus-schüttung).
14. (a) 1/6; (b) 1/6; (c) 1/36; (d) 1/6; (e) 1/4; (f) stochastisch unabhängig.
15. (a) 4/10; (b) 48/90; (c) 36/90; (d) 4/9; (e) stochastisch abhängig.
16. (a) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(\text{defekt}) = 0.05 \cdot 0.4 + 0.08 \cdot 0.6 = 0.068$; (b) Satz von Bayes: $P(\text{Schiene 2}|\text{defekt}) = 0.08 \cdot 0.6 / 0.068 = 0.706$.
17. (a) 0.3; (b) 0.9.
18. $E(X) = 0$, $V(X) = 0.6$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 15$.
19. ZV X = Anzahl richtige Antworten; Binomialverteilung mit $p = 0.2$ und $n = 16$.
(a) 0.0281; (b) 0.007; (c) 3.2; (d) 1.6; (e) ZV $P = 1 \cdot X - 0.25 \cdot (16 - X) = 5/4 \cdot X - 4$,
 $E(P) = 5/4 \cdot 3.2 - 4 = 0$, $V(P) = (5/4)^2 V(X)$, $\sigma_P = 5/4 \cdot 1.6 = 2$.

20. ZV Z = Anzahl Anrufe in 10 minütigem Intervall ist Poissonverteilung mit $\lambda = 5$. (a) $P(Z = 10) = 0.018$; (b) $E(Z) = 5$; (c) $\sigma = \sqrt{5} = 2.236$.
21. ZV W = Wartezeit in Minuten. (b) $P(W > 10) = 0.135$; (c) $P(W < 20) = 0.982$.
24. (a) $l_{21}/l_{20} = 98\,175/98\,319 = 0.9985$; (b) $(l_{20} - l_{25})/l_{20} = (98\,902 - 98\,718)/98\,902 = 0.0019$; (c) $(l_{33} - l_{34})/l_{30} = (96\,722 - 96\,580)/97\,104 = 0.0015$.
25. (a) 4.51; (b) 5.16.
26. erwarteter Barwert der Einzahlungen muss gleich dem Barwert der Auszahlung sein: $(10\,000/1.05^3) \cdot (90\,115/91\,899) = 8470.68$.
27. erwarteter Barwert der Einzahlungen muss gleich dem Barwert der Auszahlung sein: $= (10\,000/1.05) \cdot (91\,899 - 91\,350/91\,899) + (10\,000/1.05^2) \cdot (91\,350 - 90\,758/91\,899) + (10\,000/1.05^3) \cdot (90\,758 - 90\,115/91\,899) = 175.77$.
28. $8470.68 + 175.77 = 8646.45$.
29. $\ddot{a}_{50:\overline{3}|} = 1 + (1/1.05) \cdot (91\,350/91\,899) + (1/1.05^2) \cdot (90\,758/91\,899) = 2.84246$; $P = E(B_P)/\ddot{a}_{50:\overline{3}|}$; (26) 2980.05, (27) 61.84, (28) 3041.89.
30. (a) ${}_{10}A_x/\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = \frac{0.06744}{7.8577} = 0.0085$; ($q_{50} = 0.00597$, $q_{51} = 0.0064, \dots, q_{59} = 0.014$)
(b) $P_x = \frac{A_x}{a_x}$.
32. $\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = (N_{40} - N_{50})/D_{40} = 8.666$, ${}_{10}A_{40} = 0.74757$, $P_B = 0.101896$.
33. $N_{60}/D_{60} = 12.15$, bzw. $358\,393.14/19\,189.18 = 18.68$.
34. $(M_{30} - M_{50} + D_{50})/D_{30} = 0.56$.
35. $(N_{55} - N_{65})/D_{55} = 8.58$.
36. (a) 12.69, 18.88, 23.72; (b) 10.29, 13.55, 15.36.
37. abhängig von ihrem Geschlecht, Alter und gewähltem Zinssatz.
38. Hinweis: $1/x$ und $x^3 - x$ sind für $x > 0$ konvex und für $x < 0$ konkav; $x^2 + 1$ und $\exp(-x)$ sind konvex; $\log_{10}(x)$ ist konkav.

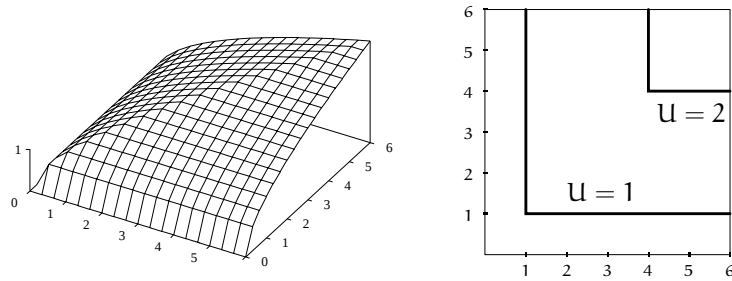
39.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:

$$f''(x) = \underbrace{b}_{>0} \underbrace{a}_{>0} \underbrace{(a-1)}_{<0 \text{ da } a < 1} \underbrace{x^{a-1}}_{>0} < 0.$$

40.



41. Ableitungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	y	2x	$2xy^2$	$\alpha x^{\alpha-1} y^\beta$
f_y	1	x	2y	$2x^2 y$	$\beta x^\alpha y^{\beta-1}$
f_{xx}	0	0	2	$2y^2$	$\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^\beta$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	$4xy$	$\alpha \beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$
f_{yy}	0	0	2	$2x^2$	$\beta(\beta-1) x^\alpha y^{\beta-2}$

Ableitungen an der Stelle (1, 1):

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	1	2	2	α
f_y	1	1	2	2	β
f_{xx}	0	0	2	2	$\alpha(\alpha-1)$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	4	$\alpha \beta$
f_{yy}	0	0	2	2	$\beta(\beta-1)$

42. (a) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = -5 < 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist Sattelpunkt.(b) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (e, 0)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -e^{-3} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $M_1 = -e^{-3} < 0$, $M_2 = 2e^{-3} > 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist lokales Maximum.(c) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$, $M_1 = 802 > 0$, $M_2 = 400 > 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist lokales Minimum.43. stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (\ln(3), \ln(4))$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -e^{x_1} & 0 \\ 0 & -e^{x_2} \end{pmatrix}$,Hauptminoren: $M_1 = -e^{x_1} < 0$, $M_2 = e^{x_1} \cdot e^{x_2} > 0$, für alle (x_1, x_2)
 $\Rightarrow$ lokales und globales Maximum in $\mathbf{x}_0 = (\ln(3), \ln(4))$.44. stationäre Punkte: $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (-1, 0, 0)$,

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 1 & 0 \\ 3x_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Hauptminoren für stationäre Punkte: $M_1 = 6x_1x_2 = 0$, $M_2 = -(3x_1^2 - 1)^2 < 0$
(da $x_1 \in \{0, -1, 1\}$), $M_3 = -2(3x_1^2 - 1)^2 < 0$, $\Rightarrow$ alle drei stationären Punkte sind Sattelpunkte.

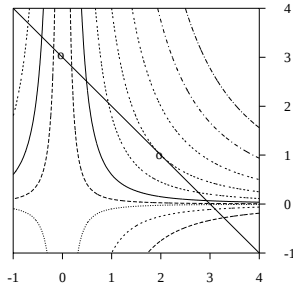
45. Die zu optimierende Gewinnfunktion lautet:

$$G(q_1, q_2, q_3) = R - C = q_1(63 - 4q_1) + q_2(105 - 5q_2) + q_3(75 - 6q_3) - (20 + 15(q_1 + q_2 + q_3)) = 48q_1 - 4q_1^2 + 90q_2 - 5q_2^2 + 60q_3 - 6q_3^2 - 20, \text{ stationärer}$$

$$\text{Punkt: } \mathbf{q}^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (6, 9, 5), \mathbf{H}_G = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}, M_1 = -8 < 0,$$

$M_2 = 80 > 0$, $M_3 = -960 < 0$, $\Rightarrow G$ ist konkav, $\Rightarrow \mathbf{q}^*$ ist globales Maximum.
 optimale Gesamtproduktion $q_{\text{opt}} = q_1^* + q_2^* + q_3^* = 6 + 9 + 5 = 20$, Umsätze:
 $R_1 = p_1^* q_1^* = (63 - 4 q_1^*) q_1^* = 36 \cdot 6 = 234$, $R_2 = 540$, $R_3 = 225$.

46.



lokales Maximum in $(2, 1)$,
 lokales Minimum in $(3, 0)$.

(b) Lagrangefunktion: $L(x, y; \lambda) = x^2 y - \lambda(x + y - 3)$,
 stationäre Punkte $\mathbf{x}_1 = (2, 1; 4)$ und $\mathbf{x}_2 = (0, 3; 0)$,

(c) geränderte Hesse-Matrix: $\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2y & 2x \\ -1 & 2x & 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1)) = 6 > 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_1$ ist ein lokales Maximum,

$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2)) = -6 \Rightarrow \mathbf{x}_2$ ist ein lokales Minimum.

47. stationäre Punkte: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; $\lambda = 4$.

48. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y^2}$, $y = f(x)$ existiert lokal in einem Intervall um $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, falls $x_0 \neq 0$, $x = g(y)$ existiert, falls $y_0 \neq 0$.

49. (a) ja; (b) nein.

50. (a) $a > 0$, $b, c > 0$ oder $b, c < 0$; (b) $b < 0$; (c) $R_A(W) = c$; (d) $R_W(W) = cW$.

52. (a) $U_1 = 1$, $U_2 = -\frac{c}{2}$, $U_{11} = 0$, $U_{22} = 0$; (b) $U_1 = 1$, $U_2 = -c\sigma_\pi$, $U_{11} = 0$, $U_{22} = -c$.

54. Ableitung der impliziten Funktion; für $c = 2$: (a) $\frac{d\pi^c}{d\sigma_\pi^2} = -\frac{1}{1} = 1$; (b) $\frac{d\pi^c}{d\sigma_\pi} = 2\sigma_\pi$.

55. $f(2) = -8$; Taylorpolynome: (a) $T_1(x) = 1 - 5(x - 1)$, $T_1(2) = -4$; (b) $T_2(x) = 1 - 5(x - 1) - 4(x - 1)^2$, $T_2(2) = -8$; (c) $T_3(x) = 1 - 5(x - 1) - 4(x - 1)^2$, $T_3(2) = -8$.

56. $f(2) = \frac{1}{2} = 0.5$; (a) $T_1(x) = 1 - (x - 1)$, $T_1(2) = 0$; (b) $T_2(x) = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2$, $T_2(2) = 1$.

57. $f(2) = \log(2) = [\ln(2)] \approx 0.6931$; (a) $T_1(x) = x - 1$, $T_1(2) = 1$; (b) $T_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$, $T_2(2) = \frac{1}{2}$.

58. (a) $\Delta f(x) \doteq 12 \exp(\frac{3}{2}x) \Delta x$; (b) $\Delta f(2) \doteq 12 e^3 \Delta x$; (c) $\Delta f(2) \doteq 12 e^3$.

59. $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$; (a) $E(Y) = E(f(X)) \doteq f(\mu) = 8e^3 \approx 160.68$; (b) $E(Y) = E(f(X)) \approx f(\mu) + \frac{1}{2}f''(\mu)\sigma^2 = 8e^3 + \frac{1}{2}18e^3 \cdot 3 = 35e^3 \approx 702.99$.

60. (a) $E(Z) = 8$, $V(Z) = 10$; (b) $E(Z) = 4$, $V(Z) = 4$; (c) $E(Z) = -2$, $V(Z) = 4$.

61. $E(\sum_{t=1}^T Z_t) = 0$, $V(\sum_{t=1}^T Z_t) = T\sigma^2$.

62. $E(\sum_{t=1}^T Z_t) = 0.5T$, $V(\sum_{t=1}^T Z_t) = T\sigma^2$.

63. (a) $\text{Corr}(X, Y) = 0.5$; (b) (i) $E(Z) = 8$, $V(Z) = 14$; (ii) $E(Z) = 4$, $V(Z) = 6$; (iii) $E(Z) = -2$, $V(Z) = 2$.

64. (a) (1) -2 , (2) 0 , (3) 2 ; (b) (i) (1) 2 , (2) 10 , (3) 18 ; (ii) (1) 0 , (2) 4 , (3) 8 ; (iii) (1) 8 , (2) 4 , (3) 0 .

65. (a) (1) $-\sqrt{8}$, (2) 0 , (3) $\sqrt{8}$; (b) (i) (1) $12 - 4\sqrt{8}$, (2) 12 , (3) $12 + 4\sqrt{8}$; (ii) (1) $6 - 2\sqrt{8}$, (2) 6 , (3) $6 + 2\sqrt{8}$; (iii) (1) $6 + 2\sqrt{8}$, (2) 6 , (3) $6 - 2\sqrt{8}$.

67. (a) $\text{Corr}(R_1, R_2) = 0.0833333$, $\text{Corr}(R_1, R_3) = 0.1333333$, $\text{Corr}(R_2, R_3) = -0.15$, $\text{Corr}(R_1, R_1) = 1$;

$$(b) \Sigma = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0.0833333 & 0.1333333 \\ 0.0833333 & 1 & -0.15 \\ 0.1333333 & -0.15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.09}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{0.16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{0.25}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.09}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{0.16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{0.25}} \end{pmatrix};$$

$$(d) V(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3) =$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

68. $\alpha_1 = 0.652174$, $\alpha_2 = 0.347826$.

69. $\alpha_1 = 0.432203$, $\alpha_2 = 0.533898$.