Taylorreihen

55. Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term

(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung, (c) 3. Ordnung,

für die Funktion $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$. Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.

Berechnen sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen sie ihn mit den Werten der Approximation an der Stelle 2.

56. Berechnen sie die Taylorreihe bis zum Term

(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung,

für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.

Berechnen sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

57. Berechnen sie die Taylorreihe bis zum Term

(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung,

für die Funktion $f(x) = \log(x)$. Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.

Berechnen sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

58. Sei $f(x) = 8\exp\left(\frac{3}{2}x\right)$. Geben sie eine lineare Approximation für die Veränderung der Funktion, Δf, an:

(a) allgemein,
(b) an der Stelle 2,
(c) an der Stelle 2 und für $\Delta x = 1$.

59. X sei normalverteilt mit $X \sim N(2,3)$. $Y = f(X) = 8\exp(\frac{3}{2}X)$. Geben sie die Approximationen

(a) 1. Ordnung, (b) 2. Ordnung,

für den Erwartungswert von Y nach der Delta-Methode an.

Lösungen

55. $f(2) = -8$; Taylorpolynome: (a) $T_1(x) = 1 - 5(x-1)$, $T_1(2) = -4$; (b) $T_2(x) = 1-5(x-1)-4(x-1)^2$, $T_2(2) = -8$; (c) $T_3(x) = 1-5(x-1)-4(x-1)^2$, $T_3(2) = -8$.

56. $f(2) = \frac{1}{2} = 0.5$; (a) $T_1(x) = 1-(x-1)$, $T_1(2) = 0$; (b) $T_2(x) = 1-(x-1)+(x-1)^2$, $T_2(2) = 1$.

57. $f(2) = \log(2) = [\ln(2) =] \approx 0.6931$; (a) $T_1(x) = x - 1$, $T_1(2) = 1$; (b) $T_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$, $T_2(2) = \frac{1}{2}$.

58. (a) $\Delta f(x) \doteq 12 \exp(\frac{3}{2}x)\Delta x$; (b) $\Delta f(2) \doteq 12\, e^3\, \Delta x$; (c) $\Delta f(2) \doteq 12\, e^3$.

59. $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$; (a) $E(Y) = E(f(X)) \doteq f(\mu) = 8\, e^3 \approx 160.68$; (b) $E(Y) = E(f(X)) \approx f(\mu) + \frac{1}{2} f''(\mu)\sigma^2 = 8\, e^3 + \frac{1}{2}\, 18\, e^3 \cdot 3 = 35\, e^3 \approx 702.99$.