

Konkavität und Konvexität

38. Zeichnen sie die Funktionen

- (a) $f(x) = 1/x$,
- (b) $g(x) = x^2 + 1$,
- (c) $h(x) = \log(x)$,
- (d) $z(x) = x^3 - x$

soweit sie definiert sind.

Wählen sie jeweils drei interessante Punkte aus, an denen sie das lokale Krümmungsverhalten der Funktionen untersuchen.

Zeichnen sie in der Umgebung jedes ausgewählten Punktes drei Tangenten an die Funktionen und beschreiben sie deren Veränderung der Steigung.

Überprüfen sie ihr Ergebnis analytisch (rechnerisch).

39. Die Funktion

$$f(x) = b x^{1-a} \quad 0 < a < 1, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Produktionsfunktion, d.h. mit x Einheiten Arbeit kann man $f(x)$ Güter produzieren.

Produktionsfunktionen haben i.a. folgende Eigenschaften:

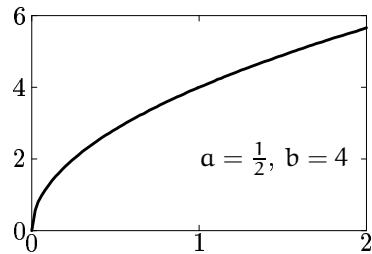
- (1) $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- (2) $f'(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
- (3) $f''(x) < 0$

- (a) Überprüfen Sie diese Eigenschaften an der obigen Funktion.
- (b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)
- (c) Was bedeuten diese Eigenschaften inhaltlich?
(z.B.: Wenn $x = 0$, wird nichts produziert.)

Lösungen

38. Hinweis: $1/x$ und $x^3 - x$ sind für $x > 0$ konvex und für $x < 0$ konkav; $x^2 + 1$ und $\exp(-x)$ sind konvex; $\log_{10}(x)$ ist konkav.

39.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:

$$f''(x) = \underbrace{b}_{>0} \underbrace{a}_{<0} \underbrace{(a-1)}_{\text{da } a < 1} \underbrace{x^{a-1}}_{>0} < 0.$$