Kapitel 7

Zerlegung von Zeitreihen

Lernziele

- Klassische Zerlegung von Zeitreihen
- Saisonbereinigungsverfahren: Gleitende Durchschnitte
- Glättungsverfahren zur Prognose: Exponentielle Glättung
- Verfahren von Holt und Holt-Winters
- Modellwahl

Zerlegungsmodelle

Die Zeitreihe Y_t wird in drei Komponenten zerlegt:

T_t ... **Trend-Zyklus**
S_t ... **Saisonale Komponente**
E_t ... **irreguläre Komponente**

$$Y_t = f(T_t, S_t, E_t)$$

Die Funktion $f(\cdot)$ kann eine Summe oder Produkt sein:

additive Zerlegung

$$Y_t = T_t + S_t + E_t$$

Der saisonale Effekt ist keine Funktion des Niveaus T_t.

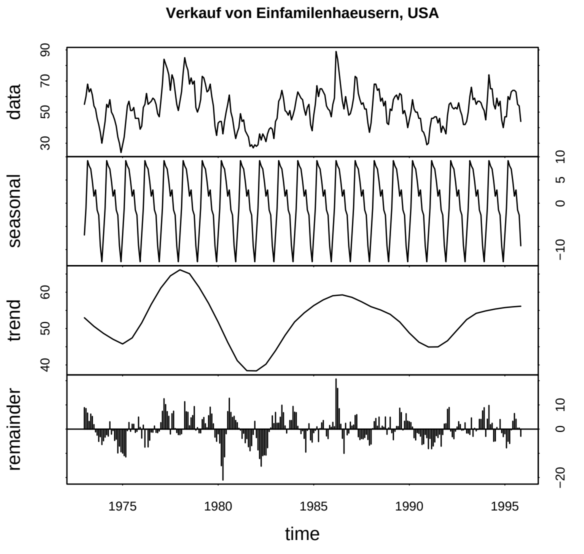
multiplikative Zerlegung

$$Y_t = T_t \cdot S_t \cdot E_t$$

Der saisonale Effekt wird durch T_t verstärkt.

Die multiplikativer Zerlegung wird durch Logarithmieren additiv:

$$Y_t = T_t \cdot S_t \cdot E_t \quad \Rightarrow \quad \log Y_t = \log T_t + \log S_t + \log E_t$$



Saisonbereinigung

Die **saisonbereinigte Reihe** zu Y_t erhalten wir indem wir die Saisonkomponente von der beobachteten Reihe abziehen,

$$(Y_t - S_t) = T_t + E_T$$

sodass Trend-Zyklus und irreguläre Komponente übrigbleiben.

Vorgangsweise:

1. Berechnung der Trendkomponente T_t.
(z.B. linearer, exponentieller, kein Trend oder Glättung)
2. Berechnung der trendbereinigten (*detrended*) Reihe $(Y_t - T_t)$.
3. Ermittlung der Saisonkomponente, S_t, aus $(Y_t - T_t)$.
4. Berechnung von $(Y_t - S_t)$.

Gleitender Durchschnitt

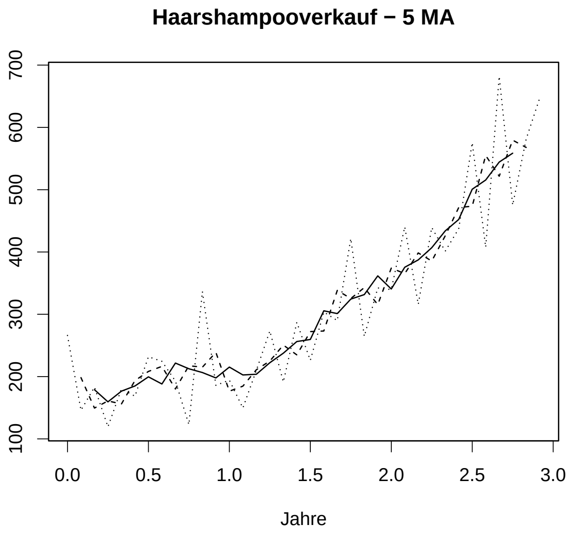
Der **gleitende Durchschnitt** (*moving average*), k **MA**, is ein Verfahren zur Berechnung der Trend-Zyklus-Komponente.
k ist ein **Zeitfenster** mit einer **ungeraden** Anzahl von Beobachtungen: $k = 2m + 1$.

$$T_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^{m} Y_{t+j} = \frac{1}{2m+1}(Y_{t-m} + \ldots + Y_t + \ldots + Y_{t+m})$$

Die neue Reihe T_t ist um die ersten m und letzten m Beobachtungen kürzer als Y_t.

Die Stärke der Glättung hängt von der Wahl von k ab.

- Für große k wird Y_t stark,
- für kleine k wenig geglättet.



Zentrierter gleitender Durchschnitt

Der gleitende Durchschnitt kann nur für ungerade Fensterweiten ausgerechnet werden, Periodenlängen sind aber oft gerade. (z.B.: 4 Quartale, 12 Monate)

In diesem Fall kann der **zentrierte gleitende Durchschnitt** (*centered moving average*) verwendet werden.

Zum Beispiel:
Der zentrierte 4 MA ist definiert als ein 2 MA eines 4 MA, bezeichnet als **2×4 MA**.

$$T_3 = \frac{1}{2}(T_1' + T_2') = \frac{1}{8}(Y_1 + 2\,Y_2 + 2\,Y_3 + 2\,Y_4 + Y_5)$$

wobei die (T_i') einen 4 MA bezeichnet.

Zentrierter gleitender Durchschnitt

2×4 MA und 12×4 MA

Allgemein gilt für einen **2×4 MA**:

$$T_t = (0.5\,Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + 0.5\,Y_{t+2})/4$$

Für Monatsdaten verwendet man den **2×12 MA**:

$$T_t = (0.5Y_{t-6} + Y_{t-5} + \ldots + Y_t + \ldots + Y_{t+5} + 0.5Y_{t+6})/12$$

Der 2×4 MA ist ein spezieller 5 MA mit nicht-konstanten Gewichten.

Gewichteter gleitender Durchschnitt

Der zentrierte MA ist ein Spezialfall eines **gewichteten gleitenden Durchschnitts** (*weighted k moving average*):

$$T_t = \sum_{j=-m}^{m} a_j Y_{t+j} \qquad \text{mit} \qquad \sum_{j=-m}^{m} a_j = 1, \quad a_j \geq 0$$

Die $a_j \geq 0$ heißen Gewichte. $k = 2m + 1$ ist ungerade.

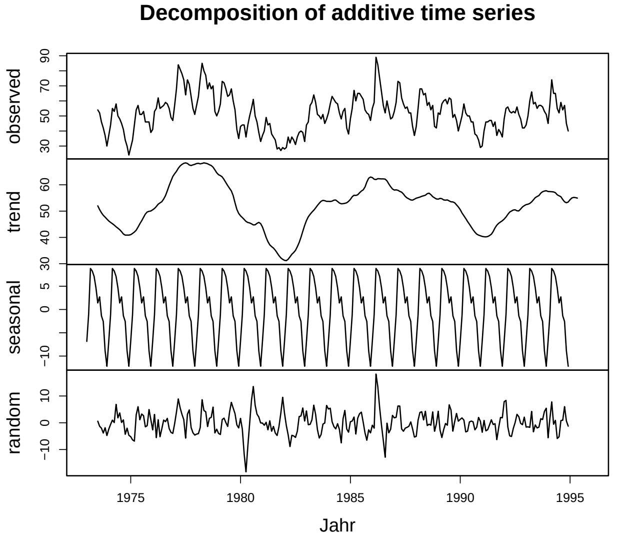
Beispiel:
Für den 2x4 MA lauten die Gewichte:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

Additive Zerlegung für Monatsdaten

Wir schreiben den Zeitindex t in der Form: $t = J.M =$ Jahr.Monat

1. Trend-Zyklus Komponente über einen 2x12 MA ermitteln: T_t.
2. *Detrending*, Trend aus Y_t eliminieren:
$$(Y_t - T_t) = S_t + E_t$$
3. Saisonale Indizes (für all 12 Monate) berechnen:
$$S_{J.M} = s_M = \frac{1}{N_M} \sum (Y - T)_{J.M} \qquad M = 1, \dots, 12$$
N_M bezeichnet die Anzahl der jeweiligen Monate.
4. Die irreguläre Komponente E_t ergibt sich als Residuum.
$$E_t = Y_t - T_t - S_t$$



Multiplikative Zerlegung für Monatsdaten

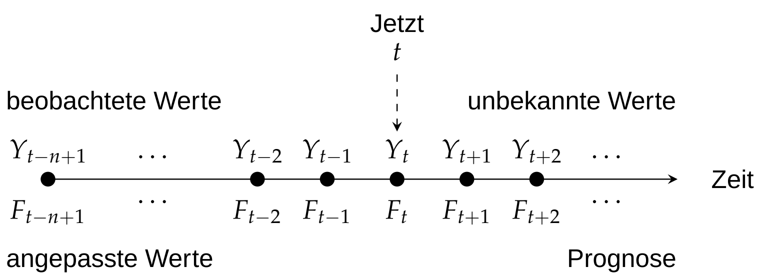
Wir gehen analog zum additiven Modell vor.

1. Trend-Zyklus Komponente über einen 2x12 MA ermitteln: T_t.
2. *Detrending*, Trend aus Y_t eliminieren:
$$R_t = (Y_t / T_t) = S_t \cdot E_t$$
3. Saisonale Indizes (für all 12 Monate) berechnen:
$$S_{J.M} = s_M = \frac{1}{N_M} \sum R_{J.M} \qquad M = 1, \ldots, 12$$
4. Die irreguläre Komponente E_t ergibt sich als Residuum.
$$E_t = Y_t / (T_t \cdot S_t)$$

Verfahren des US Bureau of Census

Ein wesentlich verfeinertes Verfahren, das speziell auf Ökonomische Reihen abgestimmt wurde, ist das **X-11 Verfahren** und dessen Weiterentwicklung das **X-12 Verfahren**. Es wird *US Bureau of Census* zur Saisonbereinigung seiner Reihen verwendet.

Prognose Szenarium



ex post Analyse	*ex ante Analyse*
Residuen, Schätzfehler	Prognosefehler
$(F_{t-i} - Y_{t-i})$	$(F_{t-i} - Y_{t-i})$

Arithmetisches Mittel

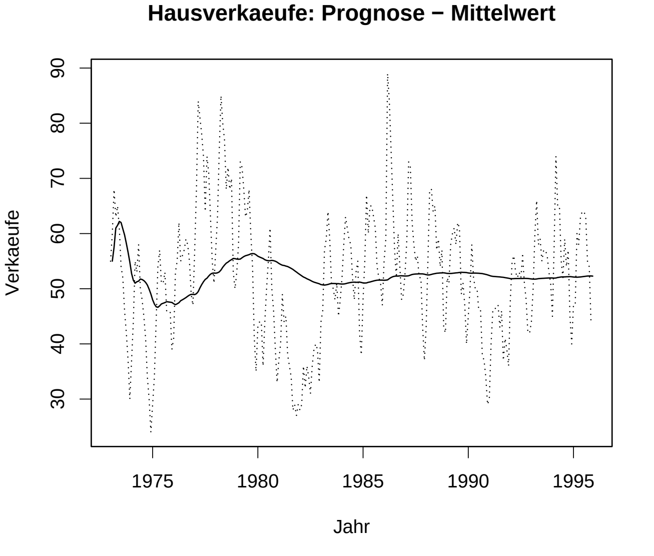
Für **Reihen ohne Trend** (stationäre Reihen) kann der Durchschnitt über die gesamte Beobachtungperiode verwendet werden:

$$\boxed{F_{t+1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} Y_i}$$

Aber auch $F_{t+h} = F_{t+1}$ für $h \geq 1$.

Wenn Y_{t+1} bekannt wird, kann man diese neue Beobachtung zur Prognose von F_{t+2} nutzen:

$$F_{t+2} = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^{t+1} Y_i$$



Gleitender Durchschnitt

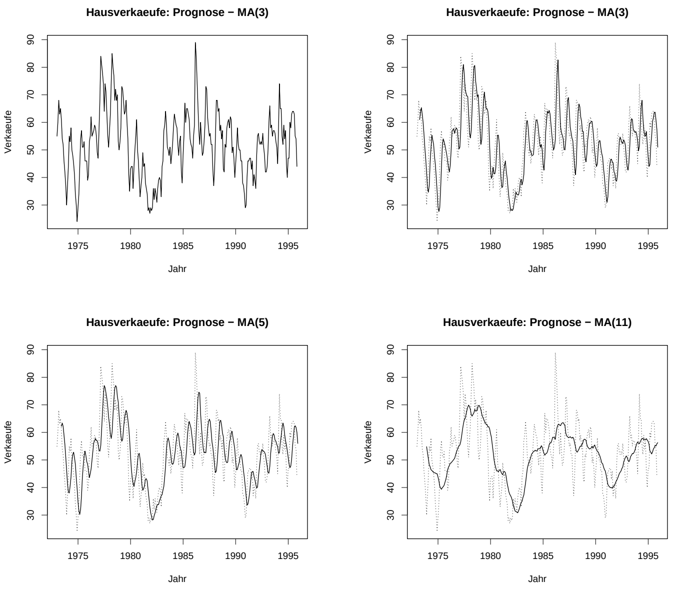
Für **Reihen mit Trend** ist ein **gleitender Durchschnitt** (*moving average*) **MA(k)** besser geeignet:

$$\boxed{F_{t+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^{t} Y_i}$$

Man beachte den Unterschied von k MA und MA(k).

Die Prognose kann auch rekursiv aus der letzten Prognose berechnet werden:

$$F_{t+1} = F_t + \frac{1}{k}(Y_t - Y_{t-k})$$

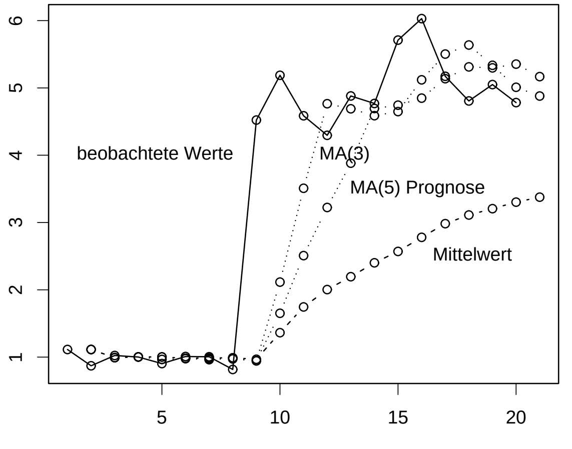


MA(k), Mittelwert und naive Prognose

Spezialfälle der MA(k) Prognose:

- Für $k = t$ fallen Mittelwert und MA zusammen.
- Für $k = 1$ erhalten wir $F_{t+1} = Y_t$, i.e. die naive Prognose.
  Der zuletzt beobachtete Wert wird als Prognose verwendet.
  (Das ist optimal für einen Random Walk ohne Drift.)

Generell gilt:
Sprünge oder Verschiebungen werden bei großem k nur langsam berücksichtigt.



Einfaches exponentielles Glätten

Das **einfache exponentielle Glätten**, (*simple exponential smoothing*), **SES**, ist ein gewichteter gleitender Durchschnitt mit geometrisch fallenden Gewichten und nur einem Parameter: $0 < \alpha < 1$.

$$\boxed{F_{t+1} = F_t + \alpha(Y_t - F_t)}$$

Die Prognose für morgen ist die letzte Prognose plus einer Fehlerkorrektur für die letzte Prognose.

- Ist α groß ($\alpha \approx 1$), wird stark auf den letzten Fehler reagiert, die Anpassung ist schnell.
- Ist α klein ($\alpha \approx 0$), wird kaum auf den Fehler reagiert, die Anpassung ist langsam.

Geeignet für **Reihen ohne Trend** und **ohne Saison**.

Einfaches exponentielles Glätten / (2)

Andere Darstellung der Rekursion:

$$\boxed{F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha) F_t}$$

F_{t+1} ist ein gewichteter Durchschnitt aus Y_t und F_t.

Explizite Darstellung:

$$\boxed{F_{t+1} = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i \, Y_{t-i} + (1-\alpha)^t F_1}$$

Prognose für die weitere Zukunft:

$$F_{t+m} = F_{t+1} \qquad \text{für } m > 0$$

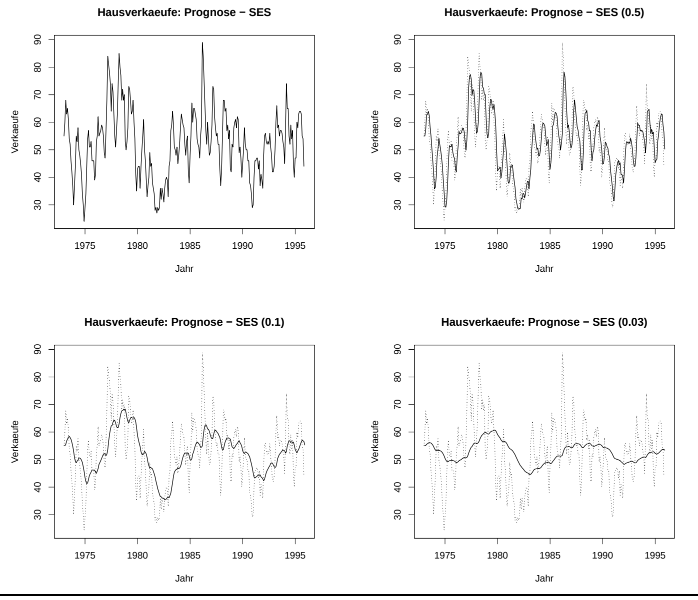
SES – Anfangswerte

Für den Anfangswert kann

- die erste Beobachtung, oder
- ein Mittel aus den ersten Beobachtungen

verwenden.

Probleme entstehen bei kurzen Datensätzen und einem kleinen α.

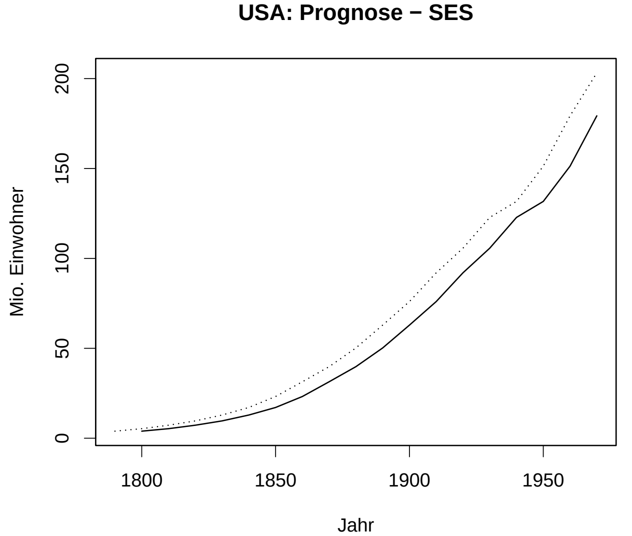


SES – optimales α

Das **„optimale“** α wird z.B. so gewählt, dass die Summe der quadrierten (1-Schritt-) Prognosefehler minimiert wird.

Berechnung:

- numerisches Verfahren zur *nicht-linearen Optimierung*, oder
- Gitter-Suche, *grid search*.
  Diese ist sehr einfach.
  Man wählt ein Gitter für das Intervall $(0, 1)$, z.B.
  $\alpha = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$, und berechnet für jedes gewählte α die mittlere Fehlerquadratsumme, MSE.
  Das α, das den kleinsten MSE liefert, ist das beste.



Holt's Methode

Das Verfahren von **Holt** erweitert das SES auf **Reihen mit linearem Trend**.

Diese Verfahren benötigt dafür zwei Parameter: $0 < \alpha, \beta < 1$.

Das Modell lautet

Niveau:	L_t	$=$	$\alpha Y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$
Trend:	b_t	$=$	$\beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1}$
Prognose:	F_{t+m}	$=$	$L_t + b_t\, m$

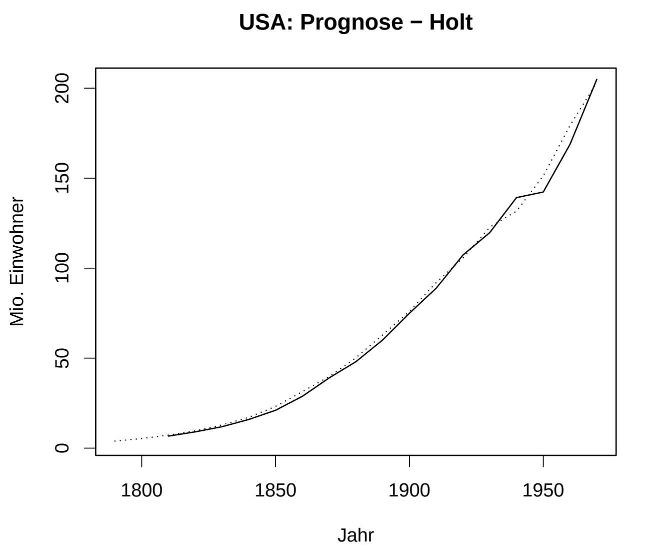
(*Trend* bedeutet hier die Steigung des Trends.)

Holt's Methode / (2)

- Die Trendgleichung ist ein SES der (1-Perioden-) Steigung der Reihe mit dem Parameter β.
- Die Niveaugleichung ist ähnlich einem SES von Y mit dem Unterschied, dass der letzte Niveauwert um die Steigung verschoben wird.
- Die Prognosegleichung gibt die m-Schritt-Prognose an. Daher wird b_t mit m multipliziert.

Wir benötigen hier zwei Anfangswerte: L_1 und b_1.
z.B.: $L_1 = Y_1$ und $b_1 = (Y_3 - Y_1)/2$

Die optimalen Parameter können wiederum über ein Gitter (α, β) (z.B.: mit $\alpha, \beta = 0.1, \ldots, 0.9$) gewählt werden.



Die Methode von Holt-Winters

Die **Methode von Holt-Winters** berücksichtigt auch saisonale Effekte und ist damit zur Prognose von Reihen mit **linearem Trend und Saison** geeignet.

Es treten hier 3 Glättungsparameter auf:

$$\alpha,\ \beta \text{ und } \gamma \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$$

Die optialen Parameterwerte werden wie oben, entweder über nicht-lineare Optimierung oder über die Gittersuche ermittelt.

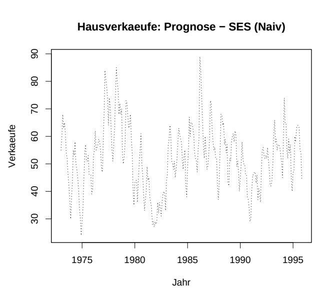
Wir unterscheiden hier zwischen einem Modell mit additiver und mit multiplikativer Saisonkomponente.

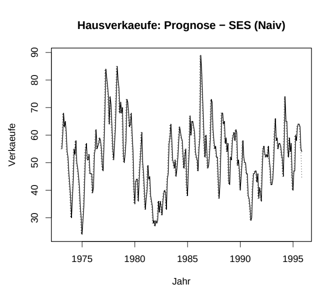
Holt-Winters mit additiver Saison

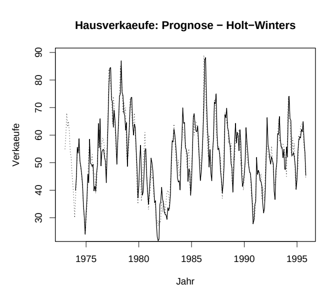
Im additiven Modell ist die Saison vom Niveau der Reihe unabhängig.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Niveau:} & L_t & = & \alpha(Y_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1}) \\
\text{Trend:} & b_t & = & \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1} \\
\text{Saison:} & S_t & = & \gamma(Y_t - L_t) + (1-\gamma) S_{t-s} \\
\text{Prognose:} & F_{t+m} & = & L_t + b_t\, m + S_{t-s+m}
\end{array}$$

- Neu ist die Saisongleichung. Hier wird ein gleitender Durchschnitt der $(Y_t - L_t)$ Komponente (Beobachtung minus geglättetem Niveau) beschrieben.
- s ist 12 für Monatsdaten, und 4 für Quartalsdaten, etc.
- Das Niveau L ergibt sich aus Y minus dem Saisoneffekt.







Holt-Winters mit multiplikativer Saison

Im multiplikativen Modell ist der Saisoneffekt proportional zum Niveau der Reihe. Der Trend selbst ist linear.

Niveau:	$L_t = \alpha(Y_t/S_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$
Trend:	$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$
Saison:	$S_t = \gamma(Y_t/L_t) + (1-\gamma)S_{t-s}$
Prognose:	$F_{t+m} = (L_t + b_t\, m) \cdot S_{t-s+m}$

- Die Saisongleichung beschreibt einen gleitenden Durchschnitt des Quotienten (Y_t/L_t).

Holt-Winters – Anfangswerte

Die benötigten Anfangswerte sind:

$$L_s,\ b_s \text{ und } S_1, \ldots, S_s$$

Für das multiplikative Modell gibt es folgende Möglichkeit:

- $L_s = (Y_1 + \ldots + L_s)/s$,
- $b_s = [(Y_{s+1} - Y_1)/s + \ldots + (Y_{s+s} - Y_s)/s]/s$

  Bemerkung: $(Y_{s+1} - Y_1)/s$ ist die durchschnittliche 1-Perioden-Steigung als Durchschnitt über s Perioden berechnet.
- $S_1 = Y_1/L_s, \ldots, S_s = Y_s/L_s$.

Diskussion

- Die vorgestellten Methoden sind einfach und benötigen höchstens drei Parameter.
- Sie lassen sich leicht automatisieren, so dass sie auf eine große Zahl von Reihen (z.B. in großen Lagerhaltungsproblemen) anwendbar sind.
- Die Zielfunktion (minimale Fehlerquadratsumme) kann bei Vorliegen von Ausreißern z.B. durch die Minimierung des MAPE, *mean absolute percentage error*, ersetzt werden.
- Die vorgestellten Modelle sind Spezialfälle des stochastischen ARIMA Modells, das später behandelt wird.
- Reihen mit exponentiellem Wachstum und multiplikativer Saison lassen sich durch Logarithmieren in Reihen mit linearem Trend und additiver Saison überführen.

Modellwahl

Die einzelnen Schritte zur Wahl eines geeigneten Modells sind:

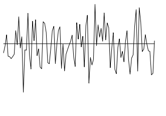
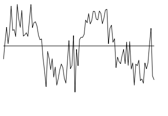
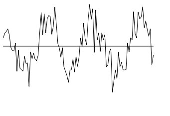
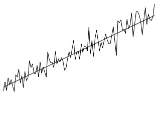
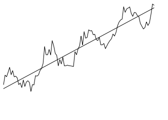
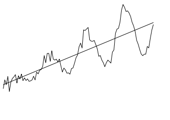
1. Teilen der Daten in zwei Teile:
   - Schätzdatensatz, *initialization set*, *estimation sample*:
     Für diesen Datensatz wird das Modell angepasst.
   - Testdatensatz, *test set*:
     Hier wird die Prognosetauglichkeit des geschätzten Modells gemessen.
2. Wahl der Glättungsmethode.
3. Schätzen des Modells für die Initialisierungsmenge.
4. Prognosegüte des Modells mit den geschätzten Parametern aus Schritt 3 an Hand des Testsatzes messen.
5. Bei Unzufriedenheit mit dem Ergebnis nochmals zu Schritt 2.

Pegel’s Klassifikation

Pegel (1969) klassifiziert Zeitreihen nach additiven oder multiplikativen Trend und Saisonkomponente.

Daraus ergeben sich eine Reihe von Modellen, die die Methode von Holt-Winters erweitern.
Die Modelle von Holt-Winters werden zu Spezialfällen.

In der Praxis such man sich ein geeignetes Modell aus.

	saisonale Komponente		
	keine	additiv	multiplikativ
kein T.			
additiver T.			
multipl. T.