Kapitel 3

Portfolio Management

Lernziele

- Konzept der modernen Portfolio-Theorie
- Capital Asset Pricing Model
- Optimieren eines Portfolios
- Analyse der Portfolioperformance

Einleitung

Einer der Bausteine der Optionspreistheorie ist Hedging des Basisobjekts mit der Option um ein risikofreies Portfolio zu erhalten.

Nicht jedes Portfolio ist bzw. soll risikofrei sein, nicht jeder Anleger hedgt.

In diesem Abschnitt sehen wir, wie ein riskantes Portfolio mit dem Ziel einen Ertrag zu garantieren und dabei das Risiko zu kontrollieren erstellt werden kann.

Annahmen

Wir treffen folgende Annahmen:

- Wir halten ein Portfolio eine *Periode* gegebener Länge, und untersuchen das Ergebnis am Ende dieser Periode.
- Während dieser Periode sind die Renditen *normalverteilt*.
- Daher genügt es die Renditen durch Erwartungswert und Standardabweichung (*Volatilität*) zu charakterisieren.

Notation

- Wir ziehen $\boldsymbol{N}$ Wertpapiere in die engere Wahl aus denen wir ein Portfolio zusammenstellen wollen. Im Folgenden beziehen wir uns nur auf Aktien.
- Der heutige Wert des Papiers $\boldsymbol{i}$ sei $\boldsymbol{S_i}$ und seine Rendite über unseren **Zeithorizont** $\boldsymbol{T}$ sei $\boldsymbol{R_i}$.
- R_i ist die zukünftige Rendite und daher nicht bekannt.
- Die Renditen werden als **normalverteilt** angenommen mit Erwartungswert $(\mu_i T)$ und Standardabweichung $(\sigma_i \sqrt{T})$.
- Die Korrelationen zwischen den Renditen von Papieren i und Papieren j sind ρ_{ij}.
- Die Parameter $\boldsymbol{\mu_i}$, $\boldsymbol{\sigma_i}$ und $\boldsymbol{\rho_{ij}}$ beziehen sich auf *Drift*, *Volatilität* und Korrelation, jeweils auf die Zeiteinheit von 1 Jahr bezogen.

Ein Portfolio über den Zeithorizont T

- Ein nomineller Anlagebetrag Π wird auf N Papiere aufgeteilt.
- Wir halten von jedem Papier w_i *Stück*.
- Der Wert des gesamten Portfolios ist zu Beginn der Periode

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} w_i \, S_i$$

- Am Ende der Halteperiode ist der Wert des Portfolios

$$\Pi + \delta\Pi = \sum_{i=1}^{N} w_i \, S_i (1 + R_i)$$

Portfoliorendite und Gewichte

Für die relative Veränderung des Portfolios, die Portfoliorendite, $\frac{(\Pi+\delta\Pi)-\Pi}{\Pi} = \frac{\delta\Pi}{\Pi}$, ergibt sich

$$\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} W_i R_i$$

wobei

$$W_i = \frac{w_i S_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i S_i} = \frac{w_i S_i}{\Pi}$$

Die W_i sind Gewichte und geben den *wertmäßigen Anteil* für Papier i an der Gesamtinvestition Π an. Sie summieren sich zu Eins.

$$\sum_{i=1}^{N} W_i = 1$$

Drift und Volatilität der Portfoliorendite

Die erwartete Rendite unseres Portfolios bezogen auf die Halteperiode der Länge T, $(\mu_\Pi T)$, ist dann einfach

$$\mu_\Pi T = E[\frac{\delta\Pi}{\Pi}] = \sum_{i=1}^{N} W_i E[R_i] = \sum_{i=1}^{N} W_i (\mu_i T)$$

Der Drift des Portfolios ist

$$\mu_\Pi = \sum_{i=1}^{N} W_i \mu_i$$

Die Volatilität ist analog

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} W_i W_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

Stochastisches Modell der Portfoliorendite

Die Portfoliorendite hat die Form

$$\boxed{\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \mu_\Pi T + \sigma_\Pi \sqrt{T} Z}$$

wobei Z eine standard-normalverteilte Zufallsvariable ist.

$\frac{\delta\Pi}{\Pi}$ ist normalverteilt.
(Reproduktionseigenschaft der Normalverteilung)

Mittel und Standardabweichung der Portfoliorendite hängen nur von den Mittel, Standardabweichungen und Korrelationen (Kovarianzen) der Renditen der Papiere ab.

Portfoliobildung

Einfaches Beispiel

- Angenommen wir haben nur Papiere in unserem Portfolio, die unkorreliert sind, $\rho_{ij} = 0, i \neq j$.
- Jedes Papier soll mit demselben Gewicht eingehen: $W_i = 1/N$.
- Der Drift der Portfoliorendite ist dann

$$\mu_\Pi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu_i$$

- Die Volatilität wird zu

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} \sigma_i^2}$$

Großes Portfolio ($N \to \infty$)

- Angenommen, alle Papiere haben dieselbe Varianz σ^2.

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} \sigma^2} = \sqrt{N \frac{1}{N^2} \sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sigma^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

- $\sigma/\sqrt{N}$ wird auch als $O(1/\sqrt{N})$, „*groß O von* $1/\sqrt{N}$“, bezeichnet.
  Wir sagen dazu: Die Volatilität ist $O(1/\sqrt{N})$.
  Sie konvergiert mit $N \to \infty$ wie $1/\sqrt{N}$ gegen Null.
- Wenn wir die Anzahl der Papiere in unserem Portfolio erhöhen, geht die Standardabweichung unseres Portfolios gegen Null: Diversifikation reduziert die Volatilität ohne die erwartete Rendite zu reduzieren.

Ziel der Portfoliohaltung

Wir wünschen uns

- eine **hohe** Rendite, und
- eine **geringe** Volatilität.

Volatilität und Risiko:

- Volatilität wird hier als Risiko interpretiert. Große Volatilität bringt ein großes Risiko, dass kleine Renditen erzielt werden, mit. (Natürlich kommen umgekehrt auch hohe Renditen vor.)
- In Hinblick auf unsere Diskussion über die Nutzenfunktion, bedeute kleine Volatilität Risikoaversion. Wir unterstellen also risikoaverses Verhalten.
- Warum nur dieses hier sinnvoll ist, werden wir gleich sehen.

Moderne Portfolio-Theorie

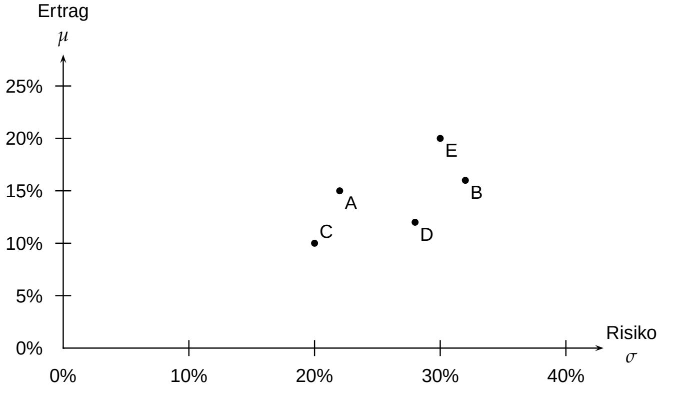
Wir suchen das **„beste“** Portfolio, die geeignetste Zusammensetzung einer fix vorgegebenen Auswahl von Wertpapieren.

Markowitz definiert ein **effizientes** Portfolio als eines

- mit dem höchsten Ertrag für ein gegebenes Niveau von Unsicherheit, oder
- das Portfolio mit dem geringsten Risiko bei gegebenem Ertrag.

Zur Illustration legen wir ein $\sigma \times \mu$-Diagramm an.

$\mu \times \sigma$–Diagramm



Risiko und Ertrag von fünf Wertpapieren

Diversifikation

Setzen Portfolio aus den Papieren C und E zusammen.

Welchen Effekt haben unterschiedliche Kombinationen auf das Risiko und den Ertrag?

Aus der Formel für den Portfoliodrift und -volatilität erhalten wir

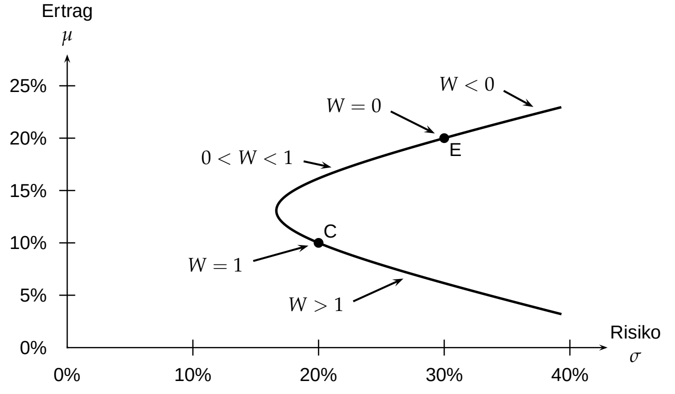
$$\mu_\Pi = W\,\mu_C + (1-W)\,\mu_E$$

$$\sigma_\Pi^2 = W^2\,\sigma_C^2 + 2\,W\,(1-W)\,\rho_{CE}\,\sigma_C\,\sigma_E + (1-W)^2\,\sigma_E^2$$

W ist das Gewicht für Papier C, $(1-W)$ das Gewicht von E.

Durch einsetzen verschiedener Werte für W erhalten wir eine Hyperbel. (Annahme: $\rho_{CE} = 0$)

Efficient Frontier / Hyperbel



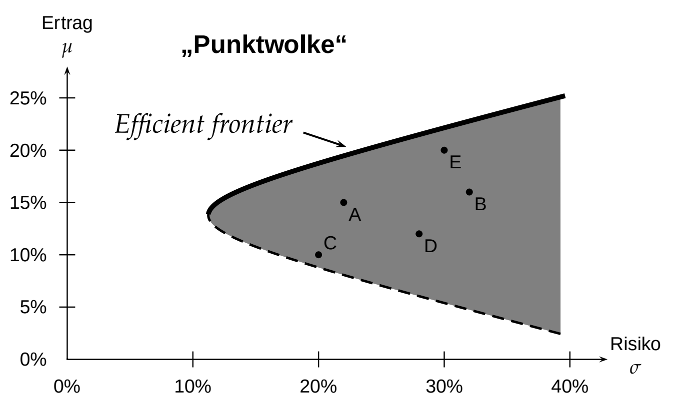
Kombination der Wertpapiere C und E

Efficient Frontier / Punkte

$$R_\Pi = W\,R_C + (1 - W)\,R_E$$

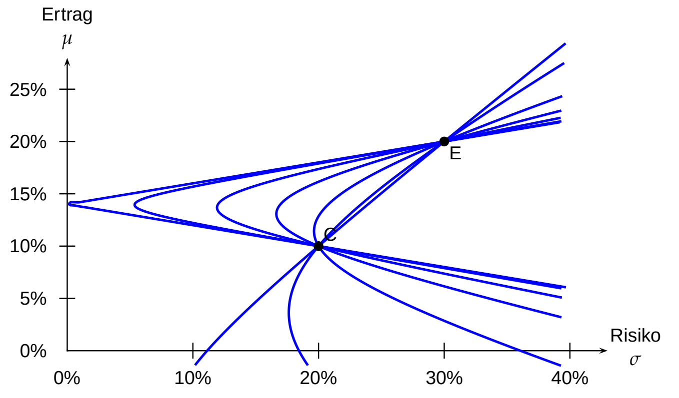
- $W = 1$: Nur Papier C.
- $W = 0$: Nur Papier E.
- $0 < W < 1$: Punkt auf der Hyperbel zwischen C und E.
- $W > 1$: Punkt unterhalb von C;
  long in Papier C, *short* in Papier E.
- $W < 01$: Punkt oberhalb von E;
  short in Papier C, *long* in Papier E.

Efficient Frontier



Kombination aller Wertpapiere

Efficient Frontier / Korrelation



Kombination der Wertpapiere C und E bei verschiedenen Korrelationen

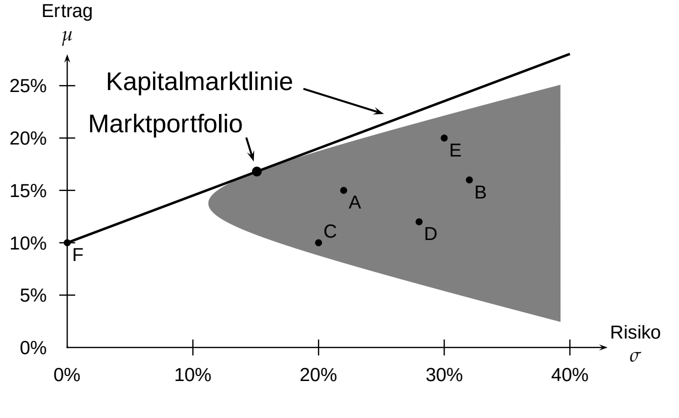
Kapitalmarktlinie und Marktportfolio

Wir betrachten Portfolios, die aus **allen** am Markt gehandelten riskanten Papieren zusammengesetzt werden, und ermitteln deren *Efficient Frontier*. Zusätzlich nehmen wir zusätzlich risikofreie Papiere auf.

Eine risikofreie Investition garantiert eine fixe Rendite von r. Die **Kapitalmarktlinie** beschreibt die *Efficient Frontier* von Portfolios, die risikofreie Papiere im Portfolio aufgenommen haben.

Das **Marktportfolio**, das Portfolio aller Wertpapiere, das sich automatisch am Markt einstellt, liegt am Berührungspunkt der Kapitalmarktlinie und der *Efficient Frontier* der riskanten Papiere.

Portfolio mit risikofreiem Wertpapier



Wahl des individuellen Portfolios

Wo wollen wir auf unserer *Efficient Frontier* sein?

Die „beste" Position auf der *Efficient Frontier* eines individuellen Portfolios ist subjektiv.

Wir bieten dazu zwei Entscheidungsregeln an:

- Mittels der Steigung der Verbindungslinie zum risikofreien Papier. Das entspricht dem **maximalen *Sharpe ratio***.
- Mittels **Nutzenfunktion** des Anlegers.

Maximaler *Sharpe ratio*

Die Steigung der Verbindungslinie des Portfolios Π zum risikofreien Papier – Punkt $(0, r)$ zu Punkt (σ_Π, μ_Π) – ist

$$\boxed{s = \frac{\mu_\Pi - r}{\sigma_\Pi}}$$

heißt ***Sharpe ratio*** einer Anlage.

Maximierung des *Sharpe ratio* ist hier gleichbedeutend mit der Maximierung der Wahrscheinlichkeit, dass die Anlage Π eine größere Rendite als die des risikofreien Zinssatzes r bringt.

Maximaler *Sharpe ratio* / Eigenschaften

Die Rendite R_Π des Portfolios Π ist normalverteilt,

$$R_\Pi \sim \mathcal{N}(\mu_\Pi, \sigma_\Pi^2)$$

Wahrscheinlichkeit, dass R_Π größer als der risikofreie Zinssatz r ist,

$$\mathrm{P}(R_\Pi > r) = \mathrm{P}(Z > \frac{r - \mu_\Pi}{\sigma_\Pi}) = \mathrm{P}(Z > -s) = \mathrm{P}(Z \leq s) = \Phi(s)$$

($\Phi(z)$ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.)

Je größer s ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite des gewählten Portfolios die einer risikofreien Anlage übertrifft.

Maximaler *Sharpe ratio* / Eigenschaften

Allgemein gilt

$$\Phi\left(\frac{\mu_\Pi - r^*}{\sigma_\Pi}\right)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite des Portfolios Π eine Rendite r^* übertrifft.

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit maximieren wollen, dass wir besser als r^* abschließen, suchen wir auf der *Efficient Frontier* das Portfolio, das den steilsten Anstieg liefert.

$$\max_\Pi \frac{\mu_\Pi - r^*}{\sigma_\Pi}$$

Wahl des Portfolios durch Nutzenmaximierung

Wir zeichnen Indifferenzkurven der gegebenen Nutzenfunktion in das $\sigma \times \mu$-Diagramm.

Die letzte nach oben verschobene Indifferenzkurve, die noch einen Punkt mit der *Efficient Frontier* gemeinsam hat, bestimmt das Portfolio.

Optimierungsproblem und *Efficient Frontier*

Die *Efficient Frontier* erhält man durch Minimierung der Standardabweichung bei gegebener erwarteter Portfoliorendite, μ_0.

$$\min_{W_i} \mathrm{V}(R_\Pi)$$

$$\text{NB:} \qquad \mathrm{E}(R_\Pi) = \mu_0$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^n W_i = 1$$

Lösung sind die optimalen Gewichte, die wertmäßigen Anteile der einzelnen Aktien.

Die Minimierung wiederholt man für Werte aus einem Intervall von interessanten Renditen, μ_0: $\quad \mu_0 > r$.

(Minimierung mittels Lagrange-Ansatz)

Diskussion, Numerik

Es sind quadratische Optimierungsprobleme zu lösen für die es Lösungsalgorithmen gibt. Alternativ kann man iterative Minimierungsverfahren herabziehen, die allerdings numerisch suboptimal sind.

Diskussion um die Zuverlässigkeit des Ansatzes:

- Probleme treten i.A. bei der Verwendung der durchschnittlichen beobachteten Renditen auf. Dabei dient die Entwicklung in der Vergangenheit als Prognose für die zukünftige Rendite. Bekanntlich ist es schwierig zukünftige Kurse, wie Renditen vorherzusagen.
  („Vorhersagen ist schwierig, vor allem für die Zukunft.“)
- Die Varianzen der Renditen kennt man i.A. besser.

Diskussion, Numerik

- In Krisensituationen und Crashs brechen plötzlich die Korrelationsstrukturen zusammen, auf die das Verfahren aufbaut. Alle Papiere korrelieren plötzlich hoch positiv.
  (Z.B. die Kurse fallen alle gleichzeitig.)
  Diversifikation hilft nicht, es sei denn sie streuen stärker.
  (. . . , Immobilien, Realitäten, Gold)
- Numerische Problem durch singuläre Korrelationsmatrizen können durch eine aufmerksam erstellte Auswahl von Papieren umgangen werden.
  So sollten nicht zwei (oder mehrere) Papiere mit fast identischem Verhalten in das Portfolio genommen werden.
  (etwa Stamm- und Vorzugsaktie eines Unternehmens)

  Für diese Probleme kann die numerische Mathematik Hilfestellungen anbieten.

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Das *Capital Asset Pricing Model*, **CAPM**, dient zur Bewertung einzelner Papiere bezüglich des Marktes, der durch einen Index repräsentiert wird.
Ein Index ist mit einem Portfolio vergleichbar: DAX30, S&P500, etc.

Dazu wird ein Beta-Koeffizient berechnet. Das Beta, β, eines Papiers **relativ zum Marktportfolio** M ist der Quotient aus der Kovarianz zwischen der Rendite des Papiers und der Rendite des Portfolios, und der Varianz der Rendite des Portfolios.

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{V(R_M)}$$

Die Interpretation erfolgt im Rahmen des ***Single-Index* Modells**.

Single-Index Modell

Wir setzen die Rendite jedes einzelnen Papiers zur Rendite **eines repräsentativen Index** M in Beziehung

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$$

Das lineare Modell für R_i besteht aus drei Teilen:

- Einem konstanten Drift, α_i,
- Einer gemeinsamen Komponente mit dem Marktindex R_M, $\beta_i R_M$, und
- einem zufälligen Teil ϵ_i, der unkorreliert mit dem Index ist.

Die Koeffizienten werden durch Schätzen des linearen Regressionsmodells ermittelt.

Single-Index Modell / Interpretation

- α_i ist die Konstante in der Regressionsgleichung.
  R_i = α_i (im Durchschnitt), wenn $R_M = 0$.
  Also, wenn $\alpha_i \neq 0$, besitzt Papier i eine autonome Rendite, auch wenn der Markt nur Null erwirtschaftet.
- β_i ist der Steigungskoeffizient.
  Steigt die Marktrendite um 1, so steigt R_i um β_i.
  - Papiere, die sich mit dem Markt bewegen, haben positive Koeffizienten; Papiere, die sich gegen den Markt bewegen, negative (Gold ?).
  - Papiere mit einem $\beta_i > 1$ reagieren stärker als der Markt; Papiere mit einem $\beta_i < 1$ schwächer.
- Der Fehler der Regression, ϵ_i, ist mit R_M unkorreliert.

Single-Index Modell und Marktindex

Sei μ_M die erwartete Rendite des Index, und σ_M deren Standardabweichung.

- Erwartete Rendite des i-ten Papiers:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M$$

- Standardabweichung:

$$\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2 \sigma_M^2 + e_i^2}$$

- e_i^2 ist die Varianz von ϵ_i.

Single-Index Modell und Portfoliorendite

Die Rendite eines Portfolio Π ist

$$\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} W_i R_i = \left(\sum_{i=1}^{N} W_i \alpha_i\right) + R_M \left(\sum_{i=1}^{N} W_i \beta_i\right) + \sum_{i=1}^{N} W_i \epsilon_i$$

Die erwartete Rendite ist ($\mathrm{E}(\epsilon_i) = 0$)

$$\mu_\Pi = \left(\sum_{i=1}^{N} W_i \alpha_i\right) + \mathrm{E}(R_M) \left(\sum_{i=1}^{N} W_i \beta_i\right)$$

Wir erhalten daher für die erwartete Portfoliorendite

$$\boxed{\mu_\Pi = \alpha_\Pi + \beta_\Pi \mu_M}$$

mit

$$\alpha_\Pi = \sum_{i=1}^{N} W_i \alpha_i, \qquad \beta_\Pi = \sum_{i=1}^{N} W_i \beta_i, \qquad \mu_M = \mathrm{E}(R_M)$$

Single-Index Modell und Portfoliorendite

Die Volatilität in Π ergibt sich als

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} W_i W_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} W_i^2 e_i^2}$$

Dies geht so einfach, weil alle ϵ_i unkorreliert mit R_M sind.

Unter der vereinfachten Annahme, dass alle Gewichte gleich $(1/N)$ sind, alle $e_i^2 = e^2$ und alle $\beta_i = \beta$ ergibt sich für die Volatilität der Portfoliorendite

$$\begin{aligned}\sigma_\Pi^2 &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(1/N)\,(1/N)\,\beta\,\beta\,\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N}(1/N)^2\,e^2 \\ &= N^2\,(1/N)^2\,\beta^2\,\sigma_M^2 + N\,(1/N)^2\,e^2 \\ &= \beta^2\,\sigma_M^2 + e^2/N\end{aligned}$$

Single-Index Modell und Diversifikation

Die Volatilität der Portfoliorendite

$$\sigma_\Pi^2 = \beta^2\,\sigma_M^2 + e^2/N$$

besteht aus 2 Teilen:

- Das **diversifizierbare Risiko** ist mit den ϵ_i verbunden: e^2/N. Dessen Beitrag zur Varianz verschwindet mit steigendem N, ($O(N^{-1/2})$).
- Das **systematische Risiko** korreliert mit dem Index: $\beta^2\,\sigma_M^2$ Es kann durch Portfoliobildung nicht reduziert werden.

Single-Index Modell und optimales Portfolio

Die Optimierung unter Verwendung des *Single-Index* Modells sieht folgende Schritte vor:

1. Berechne α_i, β_i und e_i^2 zu allen Papieren.
2. Wähle einen Wert für die erwartete Portfoliorendite μ_Π.
3. Minimiere σ_Π unter dieser Nebenbedingung.
4. Wiederhole die Minimierung für verschiedene Portfoliorenditen um die *Efficient Frontier* zu erhalten.
5. Die Position auf der Kurve ist subjektiv zu entscheiden, oder nach dem maximalen *Sharpe ratio* Kriterium.

Multi-Index Modell

Die Idee des *Single-Index* Modells kann um andere repräsentative (i.A. korrelierte) Indizes R_{M_j} erweitert werden.

Zum Beispiel kann zusätzlich zu einem Aktienmarktindex

- ein repräsentativer Bondmarktindex,
- ein Index für Währungsmärkte, oder
- ein volkswirtschaftlicher Index

in die Regression miteinbezogen werden, wenn man glaubt, dass er für die Papiere von Bedeutung ist.

$$R_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} R_{M_j} + \epsilon_i$$

Performance-Messung

Wie misst man die Performance von Anlagestrategien?

Ein Kriterium basiert auf den Vergleich mit der risikofreien Rate. Ideal wäre die risikofreien Rate **konsistent** zu überbieten.

Ein anderes Kriterium hat zum Ziel nicht nur eine hohe Rendite zu erzielen, sondern dies auch mit so wenig Varianz wie möglich zu bewältigen.

Sharpe ratio und *Treynor ratio*

Zwei der häufigsten Maßzahlen von „Rendite pro Risikoeinheit“

- ***Sharpe ratio*** setzt „Ertrag zur Variabilität“ in Beziehung:

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\mu_\Pi - r}{\sigma_\Pi}$$

- ***Treynor ratio*** setzt „Ertrag zur Volatilität“ in Beziehung:

$$\text{Treynor ratio} = \frac{\mu_\Pi - r}{\beta_\Pi}$$

μ_Π und σ_Π bzw. β_Π sind die realisierten Werte in der Beobachtungsperiode.
σ_Π ist die beobachtete Standardabweichung,
β_Π ist ein Maß für die beobachtete „Volatilität“ des Portfolios.

Sharpe ratio und *Treynor ratio*

- Der *Sharpe ratio* wird üblicherweise verwendet, wenn man das Portfolio aller Investitionen betrachtet.

- Der *Treynor ratio* wird verwendet, wenn einzelne Komponenten eines gesamten Unternehmensportfolios bewertet werden.