

# Das Black-Scholes Modell

## Lernziele

- Delta-Hedging
- Black-Scholes Gleichung
- Black-Scholes Formel

## Delta-Hedging

Wir legen ein Portfolio an, bestehend aus einer *long*-Position in einer Option und einer *short*-Position von  $\Delta$  Einheiten im zugrundeliegenden Papier. Wert des Portfolios:

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S$$

Der Wert  $V(S, t)$  der Option (bei vorgegebenem  $E$ ,  $r$  und  $T$ ) hängt vom Wert des Papiers  $S(t)$  und der Zeitspanne  $(T - t)$  ab.

Wir nehmen an, dass der Kurs des zugrunde liegenden Papiers einem **lognormalen** *Random Walk* gehorcht: (geometrische Brownsche Bewegung)

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Wie ändert sich der Wert des Portfolios ?

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

## Delta-Hedging / (2)

Nach dem Itô-Lemma gilt

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

und somit

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)}_{\text{deterministisch}} dt + \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right)}_{\text{stochastisch}} dS \end{aligned}$$

Im risikolosem Portfolio ist die stochastische Komponente gleich Null:

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta = 0$$

## Delta-Hedging / (3)

Im **risikolosen** Portfolio muss gelten:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

$V(S(t), t)$  und damit  $\frac{\partial V}{\partial S}$  ändert sich mit  $t$ . Im risikolosem Portfolio muss daher der Anteil  $\Delta$  ständig angepasst (*rebalance*) werden (**dynamisches Hedgen**).

Für die Änderung des Wertes des risikolosen Portfolios gilt

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Wegen der **Arbitragefreiheit** muss diese Änderung gleich der risikolosen Rate  $r$  sein:

$$d\Pi = r\Pi dt$$

## Die Black-Scholes Gleichung

In einem risikofreiem Portfolio gilt

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r\Pi dt = r \left( V - rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

Dies gilt für alle (infinitesimal kleinen) Zeitschritte. Wir erhalten daher die sogenannte **Black-Scholes (Differential-) Gleichung**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Das ist eine sogenannte *lineare parabolische partielle Differentialgleichung* (2. Ordnung) – *Diffusionsgleichung*.

Zur Lösung benötigen wir ausserdem den Endwert, i.e., den Wert der Option am Auszahlungstag.

## Voraussetzungen für das Black-Scholes Modell

- Der Kurs des zugrundeliegenden Papiers ist **lognormal** verteilt.
- Die **risikolose** Rate ist eine bekannte Funktion der Zeit.
- Es werden **keine Dividenden** ausbezahlt.
- **Delta-Hedging** erfolgt ständig.
- Es gibt **keine Transaktionskosten**.
- **Keine Arbitragemöglichkeiten**.

## Erwartungswert im Black-Scholes Modell

Der **faire** Preis einer Option ist der Zeitwert der **erwarteten** Auszahlung zur Fälligkeit unter einem **risikoneutralen** *geometrischen Random Walk*:

$$dS = rS dt + \sigma S dW$$

Für den Preis einer (europäische) Call-Option gilt daher

$$V(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S(T) - E, 0)]$$

## Die Black-Scholes Formel

Für der Wert der **Call-Option** erhält man:  
(nach einer langen Rechnung)

$$V(t) = S \Phi(d_1) - E e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$\Phi(x)$  ist die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.

$S = S(t)$  ist der Wert des zugrundeliegenden Papiers *heute*.