Kapitel 11

Stochastisches Integral

Lernziele

- Wiener Prozess und Brownsche Bewegung
- Stochastisches Integral
- Stochastische Differentialgleichung
- Itô's Lemma
- $\pi\times$*Daumen*-Regeln

Ein Binomialprozess

Wir werfen innerhalb einer Periode der Länge T eine Münze N mal: Bei Zahl erhalten wir $\sqrt{T/N}$ €, bei Kopf müssen wir $\sqrt{T/N}$ € zahlen.

Unser Gewinn/Verlust R_i ist eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathrm{E}(R_i) = 0$ und Varianz $\mathrm{V}(R_i) = T/N$.

Unser Guthaben zum Zeitpunkt t (nach n Zeitschritten) beträgt

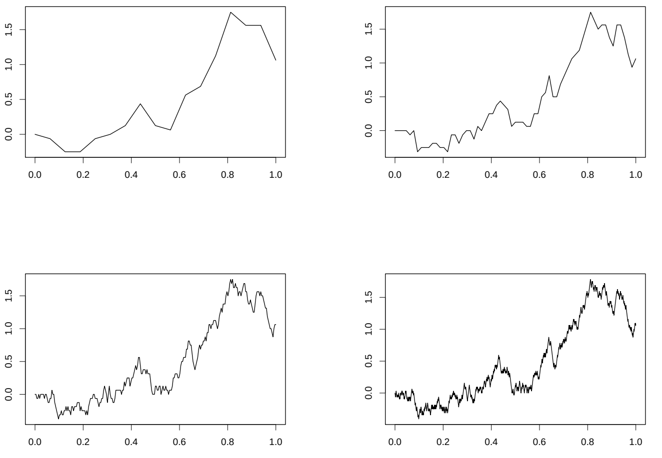
$$W(t) = W_n = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (t = n\,T/N)$$

und ist ebenfalls eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathrm{E}[W(t)] = 0$ und Varianz $\mathrm{V}[W(t)] = n\,T/N = t$.

Es gilt für $t_0 < t_1$:

$$\mathrm{E}[W(t_1) - W(t_0)] = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{V}[W(t_1) - W(t_0)] = t_1 - t_0$$

Ein Binomialprozess



Wiener Prozess und Brownsche Bewegung

Der Grenzprozess $W(t)$ für $N \to \infty$ hat folgende Eigenschaften:

- $W(t)$ ist stetig. (Aber nirgends differenzierbar!)
- Die Änderung $W(t_1) - W(t_0)$ ist unabhängig von $W(t_0)$.
- $W(t)$ erfüllt die Markov-Eigenschaft.
- $W(t_1) - W(t_0)$ (für $t_0 < t_1$) ist normalverteilt mit
  - Erwartungswert $\mathrm{E}[W(t_1) - W(t_0)] = 0$ und
  - Varianz $\mathrm{V}[W(t_1) - W(t_0)] = t_1 - t_0$.

Dieser Prozess heißt **Wiener Prozess**.

Der Prozess $X(t) = \mu\, t + \sigma W(t)$ heißt **Brownsche Bewegung**.

Das Riemann-Integral

Integrale können mit Hilfe von **Riemann-Summen** berechnet werden:

$$\int_0^T g(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\tau_i)\, (t_i - t_{i-1})$$

mit $t_i = \frac{i}{n} T$ und $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

Das Riemann-Stieltjes-Integral

Der Erwartungswert $\mathrm{E}[g(X)]$ einer Funktion g einer Zufallsvariable X mit Dichte f und Verteilungsfunktion F ist

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_a^b g(x) f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dF(x)$$

Wir fassen hier $dF(x) = f(x)dx$ als Differential von F auf.

Das Integral $\int g(x)dF(x)$ wird als **Riemann-Stieltjes-Integral** bezeichnet.

$$\int_a^b g(x)\, dF(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

mit $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ und $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Die Länge des Intervalls (x_{i-1}, x_i) wird dabei mit F „gewichtet“.

Riemann-Integral und Differential

Für den deterministischen Prozess gilt

$$dX(t) = \mu\, dt$$

Man kann das als „Kurzform“ des Integrals interpretieren

$$X(T) = X_0 + \int_0^T dX(t) = X_0 + \int_0^T \mu\, dt$$

Wir erweitern die deterministische Differentialgleichung um einen stochastischen Term:

$$dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t)$$

Was bedeuted das ?

Stochastisches Integral

$$X(T) = X_0 + \int_0^T f(t)\, dW(t) = X_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,(W(t_i) - W(t_{i-1}))$$

mit $t_i = \frac{i}{n}T$ heißt das **stochastische Integral** (**Itô Integral**) von f.

Achtung: Die Funktion f wird immer am Anfang des Intervalls (t_{i-1}, t_i) ausgewertet (d.h., links).

Als „Kurzform“ verwenden wir

$$dX(t) = f(t)\, dW(t)$$

Diese Darstellung wird in Anlehnung an gewöhnliche Differentialgleichungen auch als **stochastische Differentialgleichung** bezeichnet.

Stochastisches Integral

Der Wiener Prozess $W(t)$ ist für alle t eine Zufallsvariable.
Daher ist auch

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,(W(t_i) - W(t_{i-1}))$$

und somit auch der Grenzwert

$$X(T) = \int_0^T f(t)\,dW(t)$$

eine Zufallsvariable.

Das Integral ist eindeutig definiert im Sinne der quadratischen Konvergenz bei $n \to \infty$: Der Erwartungswert des Abweichungsquadrats strebt gegen 0.

$$\mathrm{E}\left[\left(X(T) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,(W(t_i) - W(t_{i-1}))\right)^2\right] \to 0$$

Itô's Lemma

Wie berechnet man $\int f(W)\,dW(t)$? z.B. $\int W\,dW = ?$

Sei δt sehr klein, und sei $h = \frac{\delta t}{n}$. Taylor-Formel:

$$\begin{aligned} &f(W(t+h)) - f(W(t)) \\ &\quad = f'(W(t))\,(W(t+h) - W(t)) + \tfrac{1}{2} f''(W(t))\,(W(t+h) - W(t))^2 + \dots \end{aligned}$$

Das gilt aber für jedes Interval $[t + (j-1)h, t + jh]$:

$$\begin{aligned} &f(W(t+jh)) - f(W(t+(j-1)h)) \\ &\quad = f'(W(t+(j-1)h))\,(W(t+jh) - W(t+(j-1)h)) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} f''(W(t+(j-1)h))(W(t+jh) - W(t+(j-1)h))^2 + \dots \end{aligned}$$

Itô's Lemma / (2)

Daraus folgt (unter Verwendung von $f''(W(t)) \approx f''(W(t+(j-1)h))$)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} f(W(t+jh)) - f(W(t+(j-1)h)) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} f'(W(t+(j-1)h))\,(W(t+jh) - W(t+(j-1)h)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f''(W(t+(j-1)h))\,(W(t+jh) - W(t+(j-1)h))^2 + \dots \end{aligned}$$

Linke Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} f(W(t+jh)) - f(W(t+(j-1)h)) \\ &\quad = f(W(t+nh)) - f(W(t)) = f(W(t+\delta t)) - f(W(t)) \end{aligned}$$

Rechte Seite, 1. Term (per Definition des stochastischen Integrals):

$$\sum_{j=1}^{n} f'(W(t+(j-1)h))\,(W(t+jh)-W(t+(j-1)h))$$
$$\to \int_t^{t+\delta t} f'(W)\,dW(\tau) \quad \text{für } h \to 0$$

Rechte Seite, 2. Term (quadratischen Konvergenz):
$(W(t+jh)-W(t+(j-1)h))^2$ durch
$\mathrm{E}[(W(t+jh)-W(t+(j-1)h))^2] = h = \frac{\delta t}{n}$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f''(W(t+(j-1)h))\,(W(t+jh)-W(t+(j-1)h))^2$$
$$\approx \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f''(W(t+(j-1)h))\,((t+jh)-(t+(j-1)h))$$
$$\to \tfrac{1}{2}\int_t^{t+\delta t} f''(W(\tau)\,d\tau \quad \text{für } h \to 0$$

Itô's Lemma

Insgesamt (alle anderen Terme verschwinden im Grenzübergang)

$$f(W(t+\delta t)) - f(W(t)) = \int_t^{t+\delta t} f'(W(\tau))\,dW(\tau) + \tfrac{1}{2}\int_t^{t+\delta t} f''(W(\tau))\,d\tau$$

Durch Zusammenfügen vieler kleiner Intervalle $(t, t+\delta t)$

$$f(W(T)) = f(W(0)) + \int_0^T f'(W(t))\,dW(t) + \tfrac{1}{2}\int_0^T f''(W(t))\,dt$$

Itô's Lemma in „Kurzform“:

$$\boxed{df = f'(W)\,dW + \tfrac{1}{2} f''(W)\,dt}$$

Itô's Lemma und Taylor-Formel / Kurzversion

Sei f eine Funktion der Brownschen Bewegung W. Nehmen wir an, dW wäre eine „unendlich“ kleine Änderung von $W(t)$ und wir dürften ganz naïv die Taylor-Formel verwenden:

$$df = f(W+dW) - f(W) = f'(W)\,dW + \tfrac{1}{2} f''(W)(dW)^2$$

Man kann beweisen, dass $\mathrm{E}(\int_0^t (dW)^2) = t$. Daher könnten wir schreiben

$$\boxed{(dW)^2 = dt}$$

Wir erhalten dadurch Itô's Formel

$$df = f'(W)\,dW + \tfrac{1}{2} f''(W)\,dt$$

Leider ist diese Vorgangsweise **falsch**, da W nicht differenzierbar ist!
(Funktioniert aber als $\pi\times$*Daumen*-Regel überaschend oft.)

Beispiel

Sei $f(W) = W^2$ und $W(0) = 0$. Dann ist

$$f' = 2W \quad \text{und} \quad f'' = 2$$

Aus Itô's Lemma folgt

$$df = 2W\,dW + dt$$

bzw.

$$W^2 = f(W) = f(0) + \int_0^T 2W\,dW + \tfrac{1}{2}\int_0^T 2\,dt = \int_0^T 2W\,dW + T$$

und daher gilt

$$\int_0^T W\,dW = \tfrac{1}{2}(W^2(T) - T)$$

Itô's Lemma für Brownsche Bewegungen

Wir definieren eine allgemeine Brownsche Bewegung X durch $dX = a(X)\,dt + b(X)\,dW$. Sei $f(X)$ eine Funktion von X. Dann ist

$$\boxed{df = f'(X)\,dX + \tfrac{1}{2}b^2 f''(X)\,dt}$$

Die Terme dieser Gleichung hängen oft noch direkt von der Zeit t ab:

$$dX = a(X,t)\,dt + b(X,t)\,dW$$

Dann gilt für eine Funktion $f(X,t)$:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\,dt}$$

Beispiel / Brownsche Bewegung mit Drift

$$dS = \mu\,dt + \sigma\,dW$$

ist die „Kurzform“ für

$$\begin{aligned} S(T) &= S(0) + \int_0^T \mu\,dt + \int_0^T \sigma\,dW \\ &= S(0) + \mu T + \sigma(W(T) - W(0)) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^T dW &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\, W(\tfrac{i}{n}T) - W(\tfrac{i-1}{n}T)\,\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\, W(\tfrac{n}{n}T) - W(0)\,\right] \\ &= W(T) - W(0) \end{aligned}$$

Beispiel / Modell für Aktienkurs – geometrische Brownsche Bewegung

Unser Modell für Aktienkurse lautet

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dW$$

Itô's Lemma mit $f(S) = \log S$ ergibt ($a(S) = \mu\, S$, $b(S) = \sigma\, S$)

$$\begin{aligned} df &= f'(S)\, dS + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S)\, dt \\ &= \tfrac{1}{S}\,(\mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dW) - \tfrac{1}{2}\sigma^2\, dt \\ &= (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma\, dW \end{aligned}$$

bzw.

$$\log S(T) = \log S(0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma(W(T) - W(0))$$

D.h., der logarithmierte Aktienkurs ist eine Brownsche Bewegung mit Drift $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ und Volatilität σ.

Wilmott's $\pi \times$ *Daumen*-Regeln für *Dummies*

- Stochastische Differentialgleichungen sind eine Art Vorschrift zum Erzeugen eines Zufallspfades.
- Jede Funktion eines Zufallspfades ist selbst wieder ein Zufallspfad.
- Zum Berechnen verwenden wir die Taylor-Formel.
- Dabei behalten wir nur Terme mit dt und dW („$= \sqrt{dt}$“).
- $(dW)^2$ wird durch dt ($= \mathrm{E}(dW^2)$) ersetzt.

Achtung!
Die Ergebnisse dieser $\pi \times$*Daumen*-Regeln müssen selbstverständlich immer mit „harter“ Mathematik (von einem Mathematiker) verifiziert werden!