Kapitel 10

Stochastisches Modell

Lernziele

- Zeitreihendaten und Renditen
- Deterministische und stochastische Renditen
- Stochastischer Prozess
- Wiener Prozess, ein stetiger *Random Walk*
- Vergleich deterministisches und stochastisches Wachstum
- Eigenschaften stochastischer Prozesse

Einleitung

Diskrete Prozesse (z.B. das Binomialmodell) modellieren einen Aktienkurs durch eine Zufallsfolge $S_0, S_1, \dots, S_N$ zu diskreten Zeitschritten $0, \delta t, 2\delta t, \dots, N\delta t$, mit $\delta = (T - t)/N$.

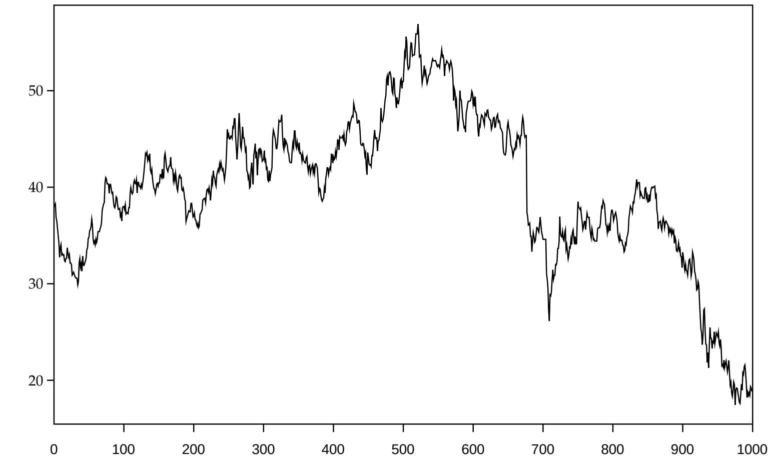
Reale Aktienkurse lassen sich mit **stetigen** Modellen besser beschreiben. Der Aktienkurs ist dann ein stetiger „Zufallspfad" $S(t)$, d.h., der Kurs kann zum jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ einen anderen Wert annehmen.

Wir werden das Konzept eines stetigen **Zufallspfads** als Limes einer diskreten Zufallsfolge mit immer kürzeren Zeitschritten plausibel machen.

Dazu betrachten wir zunächst nochmals das deterministische Wachstumsmodell und erweitern es um eine Zufallskomponente. Das Ergebnis ist ein **stochastischer Prozess** in stetiger Zeit der mit Hilfe des sogenannten **Wiener Prozesses** beschrieben wird.

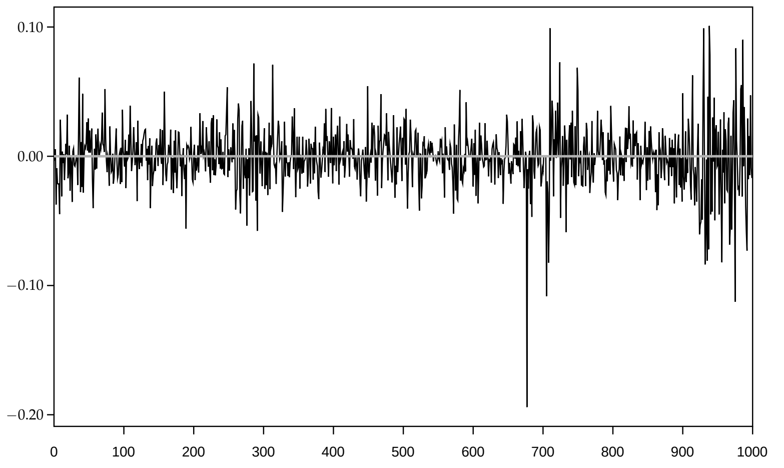
Kurs und Rendite

Aktienpreisverlauf (Bayer AG 7. 1. 1999 – 4. 1. 2003)



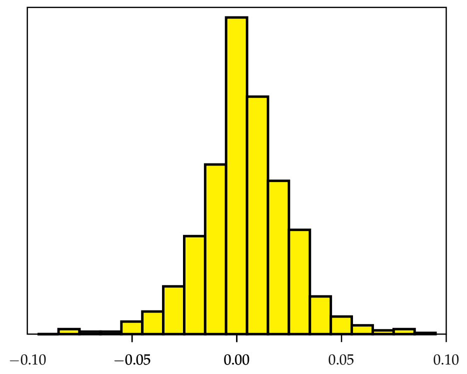
Kurs und Rendite

Renditenverlauf (Bayer AG 7. 1. 1999 – 4. 1. 2003)



Kurs und Rendite

Verteilung der Renditen (Bayer AG 7. 1. 1999 – 4. 1. 2003)



$\bar{x} = -0.0007$

$s = 0.0233$

Deterministische Rendite

Deterministische Renditen sind für eine fixe Zeitspanne δt konstant.

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu\, \delta t$$

μ ist die Wachstumsrate von S und wird auf Periode von einem Jahr bezogen. Sie heißt im stochastischen Modell **Drift**.

δt misst die Zeitspanne von i zu $(i+1)$ und skaliert μ geeignet.
Z.B. $\mu\, \delta t = \mu\, (1/250)$ ist die tagliche Wachstumsrate.

Für die Änderung von S erhalten wir

$$\delta S_i = S_i\, \mu\, \delta t$$

Dieses Modell wurde schon im Kapitel QF-Einführung verwendet.

Deterministischer Prozess S

Für *infinitesimal* („unendlich“) kleine Zeitintervalle schreiben wir

$$dS = S(t)\, \mu\, dt$$

Wir können das interpretieren als

- **Differentialgleichung**

  $$\frac{dS}{dt} = S\, \mu \qquad [\text{mit Lösung } S(t) = S_0\, e^{\mu t}\,]$$

- Anleitung zum Erzeugen eines deterministischen Prozesses:

  1. Starte bei S_0.

  2. Für $i = 1, \ldots N$: $\quad S_{i+1} = S_i + \delta S_i = S_i + S_i \cdot \mu\, \delta t \quad \doteq S_i\, e^{\mu \delta t}$

  Der stetige Prozess kann durch sehr kleine $\delta t = T/N$ beliebig genau diskret **approximiert** werden.

Prozess S und Wachstumsrate μ

Sei S_0 der Anfangswert. Dann erhalten wir für den Zeitpunkt T aus der Lösung der Differentialgleichung

$$S(T) = S_0\, e^{\mu\, T}$$

Ohne Zufallskomponente wächst S exponentiell mit Wachstumrate μ.

Im diskreten Zinsmodell erhält man (bei Approximation durch einen stetigen Prozess) die Rendite als

$$R = \log(S(t + \delta t)) - \log(S(t))$$

Der **logarithmierte** Prozess steigt linear mit μ:

$$\log(S(T)) = \log(S_0) + \mu\, T$$

Prognostizierbarkeit von Kursen

Ein typischer Verlauf eines Aktienkurses lässt die Schwierigkeiten bei dessen Prognose erahnen. Da hier viele Zufallskomponenten zusammenspielen, benötigt jedes Kursmodell eine wahrscheinlichkeitstheoretische Fundierung.

Langfristig mag das deterministisch exponentielle Modell den Eindruck erwecken eine gute Approximation zu sein, kurz- und mittelfristig ist es sicher keines.

Annahme normalverteilter Renditen

Die Verteilung der Renditen kann mittels Normalverteilung **modelliert** werden.

Jede normalverteilte Zufallsvariable R kann dargestellt werden als

$$R = \mu + \sigma Z$$

wobei $Z \sim N(0,1)$, $\mu = \mathrm{E}(R)$ und $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(R)}$ ist.

Die obige Beziehung folgt aus der Umkehrung der Standardisierung einer normalverteilten ZVen R:

$$Z = \frac{R - \mu}{\sigma}$$

Die Normalverteilung liefert allerdings zu kleine Wahrscheinlichkeiten für sehr große Renditen (vgl. Kurssprünge).

Rendite, Drift und Volatilität

Wir fügen zum deterministischen Teil (bestimmt durch **Drift** μ) eine stochastische Komponente (bestimmt durch **Volatilität** σ) hinzu:

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu\,\delta t + \sigma\,Z_i\,\sqrt{\delta t}$$

wobei $Z_i \sim N(0,1)$ und zwei ZVen Z_i und Z_j für $i \neq j$ unkorreliert sind.

R_i ist daher normalverteilt mit

$$R_i \sim N(\mu\,\delta t\,,\,\sigma^2\,\delta t)$$

Die Renditen sind **unkorreliert**.

Andernfalls könnte man den nächsten Aktienkurs prognostizieren und Arbitragegewinne erzielen.

Skalierung mit δt und $\sqrt{\delta t}$

Für sehr kleine Zeitschritte δt sind diskrete und stetige Rendite in erster Näherung gleich

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \doteq \log(S_{i+1}) - \log(S_i)$$

Die Gesamtrendite über den Zeitraum $T = 1$ Jahr ist daher die Summe der Renditen der einzelnen (sehr kurzen) Zeitintervalle der Länge $\delta t = T/N = 1/N$:

$$R_T \doteq \sum_{i=1}^{N} [\log(S_i) - \log(S_{i-1})] \doteq \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Erwartungswert und Varianz der Gesamtrendite muss daher gleichmäßige über die (gleichlangen) Zeitintervalle aufgeteilt werden.

(Wir nehmen an, dass Drift μ und Volatilität σ konstant sind.)

Skalierung mit δt und $\sqrt{\delta t}$

Angenommen $R_T \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $R_i \sim N(a\mu, b\sigma^2)$.

Aus den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz für die Summe *unkorrelierter* ZV folgt:

$$\mathrm{E}(R_T) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} R_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(R_i) = N\,a\,\mu = \mu$$

$$\mathrm{V}(R_T) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{N} R_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{V}(R_i) = N\,b\,\sigma^2 = \sigma^2$$

Daher gilt

$$a = 1/N = \delta t \qquad \text{und} \qquad b = 1/N = \delta t$$

Stochastischer Prozess S

Für die Änderung von S erhalten wir

$$\delta S_i = S_i\,\mu\,\delta t + S_i\,\sigma\,Z_i\,\sqrt{\delta t}$$

Für *infinitesimal* („unendlich“) kleine Zeitintervalle könnten wir (mathematisch nicht sehr korrekt) schreiben

$$dS = S(t)\,\mu\,dt + S(t)\,\sigma\,Z(t)\,\sqrt{dt}$$

Wie lässt sich das interpretieren ?

- Als Differentialgleichung?
- Anleitung zum Erzeugen eines stochastischen Prozesses?

Generieren von Kurspfaden

Mit unserer Formel können wir einen *möglichen* Kurspfad S generieren:

$$S_{i+1} = S_i\,(1 + \mu\,\delta t + \sigma\,\sqrt{\delta t}\,Z_i)$$

Die folgenden Parameter sind zu wählen:

- den Drift μ, die Volatilität σ,
- einen Startwert, S_0,
- die Schrittweite δt, und
- die Gesamtzahl der Schritte, bzw. die Länge der Periode.

Die standardnormalverteilten Z_i erhält per **Zufallszahlengenerator**.

(Praktisch wird aber immer der logarithmierte Pfad generiert.)

Der Wiener Prozess

Was soll $(Z(t)\sqrt{dt})$ bedeuten ?

Wir ersetzen $Z\sqrt{dt}$ durch eine **normalverteilte** Zufallsvariable dW.

$W(t)$ steht für den sogenannten **Wiener Prozess**.
dW hat die Eigenschaften:

$$dW = Z\sqrt{dt}, \qquad \mathrm{E}(dW) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{V}(dW) = \mathrm{E}(dW^2) = dt$$

Wir schreiben daher für dS

$$dS = \mu\,S\,dt + \sigma\,S\,dW \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dS}{S} \sim N(\,\mu\,dt\,,\;\sigma^2 dt)$$

Stochastische Differentialgleichung für dS

$$dS = \mu\,S\,dt + \sigma\,S\,dW$$

ist eine **stochastische Differentialgleichung**, auf die ein weites Gebiet der Theorie der Finanzmärkte aufbaut.

Die Lösung der Differentialgleichung ist eine geometrische **Brown'sche Bewegung**.

Bemerkung:
Auch hier sind $S(t)$ und $dW(t)$ Funktionen des Zeitpunkts t.

Lösung für S im Intervall $(0, T)$

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dW \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dS}{S} \sim N(\,\mu\, dt\,,\, \sigma^2 dt)$$

Der logarithmierte Prozess $\log(S)$ gehorcht

$$\log(S(T)) \sim N(\log(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T\,,\, \sigma^2\, T)$$

Der Prozess S selbst ist daher **lognormal** verteilt mit

$$\mathrm{E}[S(T)] = S_0\, \exp(\mu\, T)$$
$$\mathrm{V}[S(T)] = S_0^2\, \exp(2\,\mu\, T)\, [\exp(\sigma^2\, T) - 1]$$

Unterschied zwischen Wachstumsrate und Drift

- Deterministisches Modell:

  $$\log(S(T)) = \log(S(0)) + \mu\, T$$

  μ heißt Wachstumsrate: $S(T) = S(0)\, \exp(\mu\, T)$.

- Stochastisches Modell:

  $$\log(S(T)) \;\sim\; N(\log(S(0)) + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T\,,\, \sigma^2\, T)$$

  μ heißt Drift.

Markov-Eigenschaft

Unser stochastischer Prozess hat folgende wichtige Eigenschaft:

$$\mathrm{P}(S_i \in A | S_j, j < i) = \mathrm{P}(S_i \in A | S_{i-1})$$

D.h., die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass S_i in A gegeben alle früheren Werte $S_0, \dots, S_{i-1}$ hängt nur vom letzten Wert S_{i-1} ab.

Insbesondere gilt für den **bedingten** Erwartungswert

$$\mathrm{E}(S_i | S_j, j < i) = \mathrm{E}(S_i | S_{i-1})$$

Diese Eigenschaft wird **Markov-Eigenschaft** genannt.

Wenn S_{i-1} eine Zufallsvariable ist, dann hängt $\mathrm{E}(S_i|S_{i-1})$ von deren Realisation s_{i-1} ab. $\mathrm{E}(S_i|S_{i-1})$ ist also eine Funktion von S_{i-1} und selbst wieder eine Zufallsvariable.

Martingal-Eigenschaft

Wenn der Drift $\mu = 0$ ist, so gilt für unseren Prozess:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_{i+1}|S_i) &= \mathrm{E}(S_i + S_i\,\sigma\,Z_{i+1}\,\sqrt{\delta t}) \\
&= \mathrm{E}(S_i) + \sigma\,\sqrt{\delta t}\,\mathrm{E}(S_i)\,\mathrm{E}(Z_{i+1}) \\
&= \mathrm{E}(S_i)
\end{aligned}$$

D.h., der bedingte Erwartungswert von S_{i+1}, gegeben der letzte Wert S_i, ist gleich dem Erwartungswert des letzten Wertes.

Diese Eigenschaft wird die **Martingal-Eigenschaft** eines Prozesses genannt.

Sie spielt in der Theorie zur Bewertung von Derivaten in arbitragefreien Märkten eine wichtige Rolle.