

Aufbaukurs: Mathematische Methoden

Übungsbeispiele Sommersemester 2006

Josef Leydold
Department für Statistik und Mathematik
der Wirtschaftsuniversität Wien

16. Juni 2006

Funktionen in mehreren Variablen

1. Gegeben ist die Nutzenfunktion U eines Haushalts bezüglich zweier komplementärer Güter, Gut 1 und Gut 2 (z.B. linker Schuh und rechter Schuh eines Paares). Skizzieren Sie das Funktionen-(Nutzen-)gebirge und zeichnen Sie die Höhenlinien (Isonutzenlinien) für $U = U_0 = 1$ und $U = U_1 = 2$ ein.

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{\min(x_1, x_2)}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Hinweis: $\min(x_1, x_2)$ ist definiert als der kleinere der beiden Werte von x_1 und x_2 . Z.B.: $\min(1, 2) = 1$.

Probieren Sie z.B. die Paare $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $\dots$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $\dots$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, $\dots$

2. Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $(1, 1)$:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad f(x, y) = x + y & \text{(b)} \quad f(x, y) = xy & \text{(c)} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{(d)} \quad f(x, y) = x^2 y^2 & \text{(e)} \quad f(x, y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0 \end{array}$$

Wie lauten Gradient und Hesse-Matrix an der Stelle $(1, 1)$?

3. Berechnen Sie die stationären Punkte folgender Funktionen und stellen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um (lokale) Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad f(x, y) = -x^2 + xy + y^2 \\ \text{(b)} \quad f(x, y) = \frac{1}{x} \ln(x) - y^2 + 1 \\ \text{(c)} \quad f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2 \end{array}$$

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 - e^{x_1} - e^{x_2}$$

Berechnen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion.

5. Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1)x_2 + x_3^2$$

Stellen Sie fest ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

6. (Preisdiskiminierung)

Angenommen eine monopolistische Firma produziert ein Gut und beliefert drei Märkte. Die Nachfragefunktionen in diesen Märkten seien

$$p_1 = 63 - 4q_1, \quad p_2 = 105 - 5q_2 \quad \text{und} \quad p_3 = 75 - 6q_3.$$

Dabei ist p_i der Preis und q_i die abgesetzte Menge im Markt i . Der Gesamtumsatz R der Firma ergibt sich aus den drei Einzelumsätzen:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3.$$

Die Produktionskosten C seien unabhängig vom jeweiligen Markt:

$$C = 20 + 15q = 20 + 15(q_1 + q_2 + q_3).$$

Die Firma möchte ihren Gewinn $R - C$ maximieren. Berechnen Sie die optimale Gesamtproduktion und den Umsatz in den einzelnen Märkten.

7. Gesucht sind die (lokalen) Extrema von $f(x, y) = x^2 y$ unter der Nebenbedingung $x + y = 3$.
- (a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.
 - (b) Berechnen Sie die stationären Punkte.
 - (c) Stellen Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.
8. Ein Haushalt möchte für ein bestimmtes Nutzenniveau, $U = U_0$, seine Ausgaben E minimieren. Es sei $U = U_0 = 1 = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ und $E = 4x_1 + x_2$. Berechnen Sie die optimale Konsumkombination der Gütermengen x_1 und x_2 . Wie ändern sich die Ausgaben bezüglich des Nutzenniveaus?

Kovarianz und Korrelation

9. Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$ und $V(Y) = 2$. X und Y seien unkorreliert. Berechnen Sie $E(Z)$ und $V(Z)$ für
 (a) $Z = 3 + 2X + Y$, (b) $Z = X + Y$, (c) $Z = X - Y$.
10. Gegeben sind die unkorrelierten Zufallsvariablen Z_t , $t = 1, \dots, T$, mit Erwartungswert $E(Z_t) = 0$ und Varianz $V(Z_t) = \sigma^2$. Berechnen Sie $E(\sum_{t=1}^T Z_t)$ und $V(\sum_{t=1}^T Z_t)$.
11. Gegeben sind die unkorrelierten Zufallsvariablen Y_t , $t = 1, \dots, T$, mit Erwartungswert $E(Y_t) = 0.5$ und Varianz $V(Z_t) = \sigma^2$. Berechnen Sie $E(\sum_{t=1}^T Y_t)$ und $V(\sum_{t=1}^T Y_t)$.
12. Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 2$ und $\text{Cov}(X, Y) = 1$.
 (a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\text{Corr}(X, Y)$.
 (b) Berechnen Sie $E(Z)$ und $V(Z)$ für
 (i) $Z = 3 + 2X + Y$, (ii) $Z = X + Y$, (iii) $Z = X - Y$.
13. Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 2$, sowie
 (1) $\text{Corr}(X, Y) = -1$, (2) $\text{Corr}(X, Y) = 0$, und (3) $\text{Corr}(X, Y) = 1$.
 Berechnen Sie für (1)–(3)
 (a) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$,
 (b) die Varianzen für
 (i) $Z = 3 + 2X + Y$, (ii) $Z = X + Y$, (iii) $Z = X - Y$.
14. Wie Aufgabe 13 aber mit $V(Y) = 4$.
15. Gegeben sind die Renditen R_i dreier Wertpapiere mit folgenden Erwartungswerten und (Ko-) Varianzen: $E(R_1) = 0.1$, $E(R_2) = 12$, $E(R_3) = 0.08$; $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$, $V(R_3) = 0.25$; $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0.01$, $\text{Cov}(R_1, R_3) = 0.02$ und $\text{Cov}(R_2, R_3) = -0.03$. Stellen Sie insgesamt vier Kombinationen der Form $P = \alpha R_i + (1 - \alpha) R_j$ bzw. $P = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3$ zusammen indem Sie geeignete Werte für α bzw. α_1 und α_2 wählen.
 (a) Berechnen Sie für jedes P Ihrer Wahl Erwartungswert $E(P)$ und Varianz $V(P)$.
 (b) Nach welchen Kriterien beurteilen Sie die Kombinationen.
 (c) Welcher Kombination würden Sie den Vorzug geben.
16. Wir beziehen uns auf die Angabe in Aufgabe 15
 (a) Berechnen Sie die einzelnen Korrelationskoeffizienten. Wie groß ist $\text{Corr}(R_1, R_1)$?
 (b) Geben Sie die Kovarianzmatrix Σ an.
 (c) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix durchg. Matrixoperationen.
 (d) Berechnen Sie die Varianzen der Kombinationen bestehend aus R_1 , R_2 und R_3 über $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, (1 - \alpha_1 - \alpha_2))'$.
17. Berechnen Sie die optimale Kombination von R_1 und R_2 in Aufgabe 15.

Portfolio Management

18. Gegeben sind die Renditen dreier Wertpapiere. $E(R_1) = 0.10$, $E(R_2) = 0.12$, $E(R_3) = 0.08$, $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$, $V(R_3) = 0.25$, $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0.01$, $\text{Cov}(R_1, R_3) = 0.02$, und $\text{Cov}(R_2, R_3) = -0.03$. Wir stellen ein Portfolio der Form $P = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3$ zusammen. Suchen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio unter allen Portfolios mit $E(P) = 0.11$. Ihr Optimierungsproblem lautet

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} V(P)$$

$$\text{NB: } \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1, \quad E(P) = 0.11$$

Die erste Nebenbedingung wurde durch $\alpha_3 = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)$ schon beruecksichtigt.

19. Gegeben sind die Renditen R_1 und R_2 mit $E(R_1) = 0.10$, $E(R_2) = 0.12$, $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$. Berechnen Sie das optimale Portfolio unter
- (a) $\text{Corr}(R_1, R_2) = -1$,
 - (b) $\text{Corr}(R_1, R_2) = 0$,
 - (c) $\text{Corr}(R_1, R_2) = 1$.
20. Gegeben sind die Renditen R_1 und R_2 mit $E(R_1) = 0.08$, $E(R_2) = 0.12$, $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$, und $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0.01$. Zeichnen Sie die *efficient frontier* im μ - σ -Diagramm.
(Werten Sie $E(P)$ und $V(P)$ für verschiedene α -Werte aus und tragen Sie die Paare $(\sqrt{V(P)}, E(P))$ ins Koordinatensystem ein.)
21. Zeichnen Sie in Aufgabe 20 die Kapitalmarktklinie ein. Der risikolose Zinssatz sei $r = 0.06$.
22. Wählen Sie nach dem Kriterium des maximalen *Sharpe ratio* das beste Portfolio auf der *efficient frontier* in Aufgabe 20.
23. Gegeben ist die Beziehung $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$ aus dem CAPM. Interpretieren Sie verschiedene Werte für β_i .
(a) $\beta_i = -0.5$, (b) $\beta_i = 0$, (c) $\beta_i = 0.5$, (d) $\beta_i = 1$, (e) $\beta_i = 1.2$.
24. Gegeben ist die Beziehung $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$ aus dem CAPM. Interpretieren Sie verschiedene Werte für α_i .
(a) $\alpha_i = -0.5$, (b) $\alpha_i = 0$, (c) $\alpha_i = 0.5$, (d) $\alpha_i = r + \beta_i r$, mit dem risikofreien Zinssatz r .

Daten

25. Unter Daten für die Lehrveranstaltung (<http://statistik.wu-wien.ac.at/lv/AMS/>) finden sie den Nelson/Plosser Datensatz, NELPLOSSER, für die USA. (Nelson and Plosser(1982) *Journal of Monetary Economics* 10, 139-162)

Label	Bezeichnung	Transformation
lrea_gnp	reales Bruttonationalprodukt	logarithmiert
lnom_gnp	nominales Bruttonationalprodukt	logarithmiert
lmoney	Geldmenge	logarithmiert
lwages	Löhne	logarithmiert
lvelocit	Umlaufgeschwindigkeit des Geldes	logarithmiert
lunemploy	Arbeitslosenrate	logarithmiert
lsp500	S&P500	logarithmiert
lre_wage	Reallohn	logarithmiert
lind_prod	Industrieproduktion	logarithmiert
lgnpdef	Deflator des GNP	logarithmiert
lgnp_pcap	GNP per capita (pro Kopf)	logarithmiert
lemploy	unselbständig Beschäftigte	logarithmiert
lcpi	Verbraucherpreisindex	logarithmiert
interes	Zinssatz für festverzinsliche Staatspapiere	

- (a) Diskutieren sie die *flow*- und *stock*-Eigenschaften der Variablen.
- (b) Überprüfen sie Reallohn = Nominallohn / Verbraucherpreisindex.
- (c) Berechnen sie den Deflator aus nominellem und realem GNP.
Bemerkung: Der hier abgespeicherte Deflator des GNP wurde separat erhoben und passt hier nicht zum realen und nominellen Wert des GNP.
26. Im PKWat-Datensatz befindet sich die Variable PKW-Bestand (Bestand) in Österreich. Interpretieren sie die jährliche Veränderung des Bestands: $PKW_t - PKW_{t-1}$.
27. Gegeben sind Preise und Mengen für zwei Güter aus den Jahren 2001 bis 2003.

Jahr	Gut 1		Gut 2	
	Preis	Menge	Preis	Menge
2001	2	5	4	5
2002	1	10	4	5
2003	1	10	5	4

- (a) Berechnen Sie die Preisindices nach Laspeyres und nach Paasche für die Jahre 2001 bis 2003. Als Basisperiode verwenden Sie
 (A) 2001 und (B) 2002.
- (b) Berechnen Sie die Mengenindices nach Laspeyres und einen nach Paasche für die Jahre 2001 bis 2003. Wählen Sie dazu eine Basisjahr.
- (c) Verketteten Sie einen Preisindex aus (a) mit der Basis 2001 mit dem Index gleicher Konstruktion aber mit dem Basisjahr 2002. Vergleichen Sie die Entwicklung der einzelnen Indizes mit dem verketteten.

Zeitreihenanalyse – Prognose

- 28.** Starten Sie R, laden Sie die Daten aus `elec.dat`, bereiten Sie die Daten visuell auf. Interpretieren Sie die Zeitreihenplots.

R-Befehle: `read.table`, `ts`, `print`, `plot`.

Die Datei finden Sie auf der Homepage der Lehrveranstaltung

<http://statmath.wu-wien.ac.at/courses/mmwi-finmath/Aufbaukurs/>.

Hinweis: Schauen Sie sich den Inhalt der Datei `elec.dat` zuerst an, bevor Sie die Datei einlesen.

- 29.** Wie Aufgabe 28 mit den Daten aus `bricksq.dat`, `prodc.dat` und `ustreas.dat`.

Beschreibung von Zeitreihen

30. Betrachten Sie eine regelmäßige Sinus-Schwingung mit einer Zykluslänge von 18 Monaten und tragen auf der Zeitachse die Monate auf. Nun tasten Sie diese Schwingung mit einer Periodenlänge von einem Jahr (12 Monate) ab. Das Ergebnis ist ein scheinbarer Zyklus in der Jahresreihe mit einer Länge von 3 Jahren. Zeigen Sie diesen Sachverhalt an hand einer Graphik.
31. Zeigen Sie, dass eine starke irreguläre Komponente einen linearen Trend unsichtbar machen kann. Erstellen Sie dazu in R eine künstliche Zeitreihe mittels
`z <- ts((1:50)*0.01 + 1*rnorm(50)).`
`rnorm` erzeugt dabei standard-normalverteilte Zufallsvariable. Was passiert bei Standardabweichungen der irregulären Komponente von 0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 5 oder 10?
32. Untersuchen Sie die Histogramme von drei der bisher verwendeten Reihen. (Verwenden Sie die R-Funktion `hist`.)
33. Erzeugen Sie für die Daten aus `beer2.dat` die Streudiagramme (scatter plot) $y_{t-1} \times y_t$ und $y_{t-12} \times y_t$. Kommentieren Sie die Ergebnisse. (Verwenden Sie die R-Funktion `lag.plot` mit dem optionalen Argument `set.lags=1` bzw. `set.lags=12`.)
34. Berechnen Sie die Autokorrelationskoeffizienten erster, vierter und fünfter Ordnung für

t	1	2	3	4	5
y_t	-1	1	-1	0	1

35. Erzeugen Sie die Korrelogramme für die Daten aus `beer2.dat`, `elec.dat`, und sowie den Logarithmus und die Differenzen der um zwölf Monate verschobenen logarithmierten Daten aus `elec.dat`. Analog für die Daten `fscom` aus der Datei `sp500.dat`. Kommentieren Sie die Ergebnisse auch in Hinblick auf Stationarität bzw. Nichtstationarität der Reihen bzw. transformierten Reihen. Kommentieren Sie Graphen und Korrelogramm. (Verwenden Sie die R-Funktion `acf` für die Autokorrelationsfunktion und `lag` für das verschieben der Zeitreihe. Die Differenz der um 12 Monate verschobenen logarithmierten Daten erhalten Sie mit `log(elec) - log(lag(elec, 12))`.)
36. Erzeugen Sie mehrere Realisationen eines White Noise Prozesse (mittels `wn <- rnorm(100)`) und berechnen Sie die Korrelogramme. Beschreiben Sie die Ergebnisse auch in Hinblick auf Stationarität bzw. Nichtstationarität der Reihen. Kommentieren Sie Graphen und Korrelogramm.
37. Wählen Sie für `elec.dat` und einer Reihe ihrer Wahl eine geeignete varianzstabilisierende Transformation.
Hinweis: Für `elec.dat` ist der Logarithmus die geeignete Transformation, da `log(elec) - log(lag(elec, 12))` eine konstante Varianz um das (zwar steigende) Mittel aufweist.

Saisonbereinigung und Glättung



38. Geben Sie die Darstellung und Gewichte eines 3×5 MA an.



39. Gegeben sind die folgenden Halbjahres Daten:

82, 115, 111, 137, 128, 158, 150, 175, 167, 207, 182, 215.

- (a) Glätten Sie die Reihe mittels 2×2 MA.
- (b) Glätten Sie die Reihe einem gewichteten MA, mit den Gewichten $1/4, 1/2, 1/4$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit (a).
- (c) Eliminieren Sie den Trend.
- (d) Berechnen Sie die saisonalen Indizes.
- (e) Berechnen Sie die irreguläre Komponente

(Verwenden Sie die additive Zerlegung.)

40. Berechnen Sie den MA 2×4 und den MA 2×12 für die SP500 Reihe (aus `nelplosser.dat`). Vergleichen Sie die beiden Trend-Zyklus Reihen mit der ursprünglichen.

41. Bereinigen Sie die australischen Bierkonsumreihe `beer2` um die Saison.

- Welches Modell verwenden Sie, das additive oder das multiplikative?
- Geben sie die Trend-Zyklus Komponente an.
- Stellen Sie die saisonbereinigte Reihe graphisch dar und vergleichen Sie sie mit dem Trend-Zyklus Verlauf.

(Verwenden Sie die R-Funktion `decompose`.)

42. Wie Aufgabe 41 für die Elektrizitätsproduktion in Australien (`elec.dat`).

43. Glätten Sie eine Finanzreihe ihrer Wahl mit SES. Verwenden Sie dabei

- (a) selbstgewählte α (einmal klein und einmal groß) und
- (b) das optimale α , das von R anbietet.

Vergleichen Sie die Graphiken

(Verwenden Sie die R-Funktion `Holtwinters` mit `beta=0` und `gamma=0`.)

44. Verwenden Sie das additive Verfahren von Holt für

- (a) die australische Bierkonsumreihe,
- (b) SP500,
- (c) die Elektrizitätsproduktion in Australien.

Vergleichen Sie die geschätzten Parameterwerte.

Vergleichen Sie visuell die Anpassung in der Schätzperiode.

Ist die Prognose des Verfahrens plausibel?

(Verwenden Sie die R-Funktion `Holtwinters` mit `gamma=0`.)

45. Verwenden Sie das additive Verfahren von Holt-Winters für

- (a) die australische Bierkonsumreihe,
- (b) SP500,
- (c) die Elektrizitätsproduktion in Australien.

Wie Aufgabe 44.

(Verwenden Sie die R-Funktion **Holtwinters**.)

46. Verwenden Sie das multiplikative Verfahren von Holt-Winters für

- (a) die australische Bierkonsumreihe,
- (b) SP500,
- (c) die Elektrizitätsproduktion in Australien.

Wie Aufgabe 44.

(Verwenden Sie die R-Funktion **Holtwinters**.)

47. Welches Verfahren ist für welche Reihe aus den Aufgaben 44, 45 und 46 am besten geeignet?

48. Verwenden Sie das multiplikative Verfahren von Holt-Winters für die Prognose für das nächste Jahr für

- (a) die australische Bierkonsumreihe,
- (b) SP500,
- (c) die Elektrizitätsproduktion in Australien.

Achten Sie auf die Anzahl der Perioden pro Jahr.

(Verwenden Sie die R-Funktion **Holtwinters** in Verbindung mit **predict**.)

Stochastisches Modell

49. (a) Gegeben ist eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z , $Z \sim N(0, 1)$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $X = 0.1 + 0.2Z$.
- (b) Standardisieren Sie die Zufallsvariable Y mit Erwartungswert $E(Y) = 0.1$ und Varianz $V(Y) = 0.04$. Geben Sie Erwartungswert und Varianz der standardisierten Zufallsvariable an.
50. Die Rendite R einer Aktie besitze Drift $\mu = 0.1$ und Volatilität $\sigma = 0.2$. Geben Sie
- (a) die stochastische Differentialgleichung für den Kurs S der Aktie an;
- (b) eine Approximation für die erwartete Halbjahresrendite und die zugehörige Standardabweichung an;
- (c) eine Approximation für die erwartete Zweijahresrendite und die zugehörige Standardabweichung an.
51. Gegeben sind identisch verteilte und unkorrelierte Zufallsvariable $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$. Eine Folge von Zufallsvariablen X_k sei definiert als

$$X_k = X_0 + \sum_{i=1}^k \epsilon_i$$

wobei X_0 eine feste Zahl ist (kein Zufallsvariable). Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von

(a) X_0 , (b) X_1 , (c) X_2 , (d) X_3 , (e) X_k .

52. Der Prozess in Aufgabe 51 heißt *Random Walk* (in diskreter Zeit) und besitzt die Rekursionsdarstellung

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t.$$

Geben Sie Erwartungswert, Varianz und Verteilung der Differenz

$$X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$$

an.

53. Starten Sie mit S_0 und führen Sie mit der folgenden Regel zwei fiktive Generierungsschritte für den Kurspfad S durch, i.e., $S_0 \rightarrow S_1$ und $S_1 \rightarrow S_2$. Verwenden Sie

$$S_{i+1} = S_i(1 + \mu \delta t + \sigma \sqrt{\delta t} Z_i),$$

$S_0 = 100$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.05$ und $\delta t = \frac{1}{50}$ ($Z \sim N(0, 1)$). Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von S_1 und S_2 .

54. Geben Sie die Verteilung von $\frac{dS}{S}$ an:
- (a) $dS = 0.2 S dt$; (b) $dS = 0.1 S dt + 0.2 S dW$; (c) $dS = S dW$.
55. Vergleichen Sie die Lösungen für S :
- (a) $dS = 0.1 S dt$; (b) $dS = 0.1 S dt + 0.1 S dW$.
- Geben Sie die Verteilung von $\log(S)$ an.

Stochastisches Integral

56. Sei $W(t)$ ein Wiener Prozess im Intervall $[0, T]$ mit bekanntem Anfangswert.

- Wie sind $W(0)$, $W(T/4)$ und $W(T)$ verteilt?
- Wie ändert sich die Verteilung von $W(T)$, wenn bereits $W(T/2) = 0$ bekannt ist? Wie lauten die bedingten Verteilungen von $W(T) | \{W(T/2) = 0\}$ und $W(T) | \{W(T/2) = 1\}$.
- Wie ändert sich die Verteilung von $W(T)$, wenn bereits $W(T/2) = w_{1/2}$ bekannt ist? Wie lautet die bedingte Verteilung von $W(T) | \{W(T/2) = w_{1/2}\}$?
- Wie ändert sich die Verteilung von $W(T)$, wenn außer $W(T/2) = w_{1/2}$ auch noch $W(T/8) = w_{1/8}$, $W(T/4) = w_{1/4}$ und $W(3T/8) = w_{3/8}$ bekannt sind? Wie lautet die bedingte Verteilung von $W(T) | \{W(T/8) = w_{1/8}, W(T/4) = w_{1/4}, W(3T/8) = w_{3/8}, W(T/2) = w_{1/2}\}$?
- Wie heißt die in (d) beobachtete Eigenschaft?

57. Wie Aufgabe 56 aber mit einer Brownschen Bewegung $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ im Intervall $[0, T]$ mit bekanntem Anfangswert.

58. Sei $W(t)$ ein Wiener Prozess im Intervall $[0, T]$. Berechnen Sie die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen mittels Grenzwert der Riemann-Summen der stochastischen Integrale.

$$(a) \int_0^T dW(t), \quad (b) \int_0^T t dW(t), \quad (c) \int_0^T t^2 dW(t), \quad (d) \int_0^T \sqrt{t} dW(t),$$

Wie lautet für eine allgemeine stetige Funktion $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Verteilung von

$$(e) \int_0^T f(t) dW(t) ?$$

Muss zur Berechnung dieser Verteilungen der Anfangswert $W(0)$ des Wiener Prozesses $W(t)$ bekannt sein? Wenn ja, wählen Sie einen geeigneten Wert.

Hinweis: Approximieren Sie das stochastische Integral durch die entsprechende Riemann-Summe. Verwenden Sie die Eigenschaften des Wiener Prozesses und die Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz (und vergessen Sie dabei nicht auf die Modellannahme des Wiener Prozesses, dass dessen Änderungen stochastisch unabhängig sind). Eine zentrale Rolle spielt auch die *Reproduktionseigenschaft der Normalverteilung* (die Summe von normalverteilter Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt).

59. Wie Aufgabe 58 aber mit einer Brownschen Bewegung $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$.

60. Sei $W(t)$ ein Wiener Prozess. Geben Sie

$$(a) 5W - 3t, \quad (b) W^2 + 2W + 1, \quad (c) 0.1t + 0.3tW, \\ (d) \exp(W), \quad (e) \exp(3tW), \quad (f) \sin(W)$$

mit Hilfe von Itô's Lemma als stochastisches Integral an.

61. Wie Aufgabe 60 aber mit einer Brownschen Bewegung $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$.

62. Sei $dX(t) = 2X dt + 4X dW$ ein stochastischer Prozess. Berechnen Sie $\log(X)$. Wie lautet die Verteilung dieser Zufallsvariable?

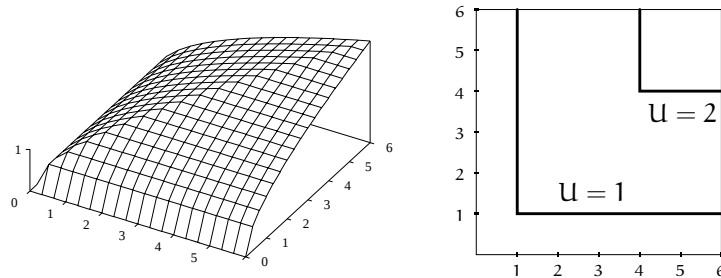
Black-Scholes Formel

- 63.** Berechnen Sie die Werte einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreisen von 95 €, 100 € und 105 € und Fälligkeitszeitpunkt 1. Mai nach dem Black-Scholes-Modell. Der risikofreie Zinssatz beträgt $r = 10\%$, die Volatilität des zugrunde liegenden Papiers beträgt $\sigma = 15\%$. Heute sei der 1. April und der Preis des Papiers beträgt 95 €.

Führen Sie die Berechnung auch für $\sigma = 20\%$ und für eine Option mit Fälligkeitszeitpunkt 1. Juni durch. Was Beobachten Sie?

Lösungen

1.



2. Ableitungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	y	2x	$2xy^2$	$\alpha x^{\alpha-1} y^\beta$
f_y	1	x	2y	$2x^2 y$	$\beta x^\alpha y^{\beta-1}$
f_{xx}	0	0	2	$2y^2$	$\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^\beta$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	$4xy$	$\alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$
f_{yy}	0	0	2	$2x^2$	$\beta(\beta-1) x^\alpha y^{\beta-2}$

Ableitungen an der Stelle (1,1):

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	1	2	2	α
f_y	1	1	2	2	β
f_{xx}	0	0	2	2	$\alpha(\alpha-1)$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	4	$\alpha\beta$
f_{yy}	0	0	2	2	$\beta(\beta-1)$

3. (a) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$M_2 = -5 < 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist Sattelpunkt.

(b) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (e,0)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -e^{-3} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$M_1 = -e^{-3} < 0$, $M_2 = 2e^{-3} > 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist lokales Maximum.

(c) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (1,1)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$,

$M_1 = 802 > 0$, $M_2 = 400 > 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist lokales Minimum.

4. stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (\ln(3), \ln(4))$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -e^{x_1} & 0 \\ 0 & -e^{x_2} \end{pmatrix}$,

Hauptminoren: $M_1 = -e^{x_1} < 0$, $M_2 = e^{x_1} \cdot e^{x_2} > 0$, für alle (x_1, x_2)
 $\Rightarrow$ lokales und globales Maximum in $\mathbf{x}_0 = (\ln(3), \ln(4))$.

5. stationäre Punkte: $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (-1, 0, 0)$,

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 1 & 0 \\ 3x_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Hauptminoren für stationäre Punkte: $M_1 = 6x_1x_2 = 0$, $M_2 = -(3x_1^2 - 1)^2 < 0$
 (da $x_1 \in \{0, -1, 1\}$), $M_3 = -2(3x_1^2 - 1)^2 < 0$,
 $\Rightarrow$ alle drei stationären Punkte sind Sattelpunkte.

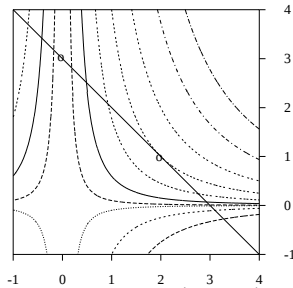
6. Die zu optimierende Gewinnfunktion lautet:

$$G(q_1, q_2, q_3) = R - C = q_1(63 - 4q_1) + q_2(105 - 5q_2) + q_3(75 - 6q_3) - (20 + 15(q_1 + q_2 + q_3)) = 48q_1 - 4q_1^2 + 90q_2 - 5q_2^2 + 60q_3 - 6q_3^2 - 20, \text{ stationärer}$$

Punkt: $\mathbf{q}^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (6, 9, 5)$, $\mathbf{H}_G = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$, $M_1 = -8 < 0$,

$M_2 = 80 > 0$, $M_3 = -960 < 0$, $\Rightarrow G$ ist konkav, $\Rightarrow \mathbf{q}^*$ ist globales Maximum.
 optimale Gesamtproduktion $\mathbf{q}_{\text{opt}} = \mathbf{q}_1^* + \mathbf{q}_2^* + \mathbf{q}_3^* = 6 + 9 + 5 = 20$, Umsätze:
 $R_1 = p_1^* q_1^* = (63 - 4q_1^*) q_1^* = 36 \cdot 6 = 234$, $R_2 = 540$, $R_3 = 225$.

7.



lokales Maximum in $(2, 1)$,
 lokales Minimum in $(3, 0)$.

(b) Lagrangefunktion: $L(x, y; \lambda) = x^2 y - \lambda(x + y - 3)$,
 stationäre Punkte $\mathbf{x}_1 = (2, 1; 4)$ und $\mathbf{x}_2 = (0, 3; 0)$,

(c) geränderte Hesse-Matrix: $\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2y & 2x \\ -1 & 2x & 0 \end{pmatrix}$,

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1)) = 6 > 0, \Rightarrow \mathbf{x}_1 \text{ ist ein lokales Maximum,}$$

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2)) = -6 \Rightarrow \mathbf{x}_2 \text{ ist ein lokales Minimum.}$$

8. stationäre Punkte: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; $\lambda = 4$.

9. (a) $E(Z) = 8$, $V(Z) = 10$; (b) $E(Z) = 4$, $V(Z) = 4$; (c) $E(Z) = -2$, $V(Z) = 4$.

10. $E(\sum_{t=1}^T Z_t) = 0$, $V(\sum_{t=1}^T Z_t) = T\sigma^2$.

11. $E(\sum_{t=1}^T Z_t) = 0.5T$, $V(\sum_{t=1}^T Z_t) = T\sigma^2$.

12. (a) $\text{Corr}(X, Y) = 0.5$; (b) (i) $E(Z) = 8$, $V(Z) = 14$; (ii) $E(Z) = 4$, $V(Z) = 6$; (iii) $E(Z) = -2$, $V(Z) = 2$.

13. (a) (1) -2 , (2) 0 , (3) 2 ; (b) (i) (1) 2 , (2) 10 , (3) 18 ; (ii) (1) 0 , (2) 4 (3) 8 ; (iii) (1) 8 (2) 4 (3) 0 .
14. (a) (1) $-\sqrt{8}$, (2) 0 , (3) $\sqrt{8}$; (b) (i) (1) $12 - 4\sqrt{8}$, (2) 12 (3) $12 + 4\sqrt{8}$; (ii) (1) $6 - 2\sqrt{8}$, (2) 6 , (3) $6 + 2\sqrt{8}$; (iii) (1) $6 + 2\sqrt{8}$, (2) 6 , (3) $6 - 2\sqrt{8}$.
16. (a) $\text{Corr}(R_1, R_2) = 0.0833333$, $\text{Corr}(R_1, R_3) = 0.133333$, $\text{Corr}(R_2, R_3) = -0.15$, $\text{Corr}(R_1, R_1) = 1$;
- (b) $\Sigma = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0.0833333 & 0.133333 \\ 0.0833333 & 1 & -0.15 \\ 0.133333 & -0.15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.09}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{0.16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{0.25}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.09}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{0.16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{0.25}} \end{pmatrix}$;
- (d) $V(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3) = (\alpha_1, \alpha_2, (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$
17. $\alpha_1 = 0.652174$, $\alpha_2 = 0.347826$.
18. $\alpha_1 = 0.432203$, $\alpha_2 = 0.533898$.
- 25.
- 28.
- 30.
38. Ein 3×5 MA ist ein 3 MA von 5 MA: $1/3(1/5(Y_{t-3} + Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}) + 1/5(Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2}) + 1/5(Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2} + Y_{t+3}))$; Gewichte $(1, 2, 3, 3, 3, 2, 1)/15$
39. (a) NA, 105.75, 118.50, 128.25, 137.75, 148.50, 158.25, 166.75, 179.00, 190.75, 196.50, NA; (b) identisch zu (a); (c) NA, 9.25, -7.50, 8.75, -9.75, 9.50, -8.25, 8.25, -12.00, 16.25, -14.50, NA; (d) -10.4, 10.4; (e) NA, -1.15, 2.9, -1.65, 0.65, -0.9, 2.15, -2.15, -1.6, 5.85, -4.1, NA.
49. (a) $E(X) = 0.1$, $V(X) = 0.04$; (b) $Z = (Y - 0.1)/0.2$, $E(Z) = 0$, $Z(X) = 1$.
50. (a) $dS = 0.1 S dt + 0.2 S dW$; (b) Erwartungswert $0.1 \cdot 0.5 = 5\%$, Standardabweichung $0.2 \cdot \sqrt{0.5} = 14.14\%$; (c) Erwartungswert $0.1 \cdot 2 = 20\%$, Standardabweichung $0.2 \cdot \sqrt{2} = 28.28\%$
51. (a) $E(X_0) = X_0$, $V(X_0) = 0$, $\sigma_{X_0} = 0$; (b) $E(X_1) = X_0$, $V(X_1) = \sigma^2$, $\sigma_{X_1} = \sigma$; (c) $E(X_2) = X_0$, $V(X_2) = 2\sigma^2$, $\sigma_{X_2} = \sqrt{2}\sigma$; (d) $E(X_3) = X_0$, $V(X_3) = 3\sigma^2$, $\sigma_{X_3} = \sqrt{3}\sigma$; (e) $E(X_k) = X_0$, $V(X_k) = k\sigma^2$, $\sigma_{X_k} = \sqrt{k}\sigma$.
52. $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.
53. S_1 : $E(S_1) = 100.2$, $V(S_1) = 0.5$, $\sigma_{S_1} = \sqrt{0.5}$; S_2 : $E(S_2) = 100.4$, $V(S_2) \doteq 1$, $\sigma_{S_2} \doteq 1$ (in erster Näherung).
54. (a) $0.2 dt$; (b) $N(0.1 dt, 0.04 dt)$; (c) $N(0, dt)$.
55. (a) $\log(S) = \log(S_0) + 0.1 T$; (b) $\log(S) \sim N(\log(S_0) + 0.095 T, 0.01 T)$.

56. (a) $W(T) \sim N(0, T)$

57. (a) $X(T) \sim N(\mu T, \sigma^2 T)$

63. mit Tabelle: für $S = 100$, $E = 95$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.15$ und $T - t = 1/12$: $V = 13.34$