Stochastisches Integral

56. Sei $W(t)$ ein Wiener Prozess im Intervall $[0, T]$ mit bekanntem Anfangswert.

(a) Wie sind $W(0)$, $W(T/4)$ und $W(T)$ verteilt?

(b) Wie ändert sich die Verteilung von $W(T)$, wenn bereits $W(T/2) = 0$ bekannt ist? Wie lauten die bedingten Verteilungen von $W(T) \,|\, \{W(T/2) = 0\}$ und $W(T) \,|\, \{W(T/2) = 1\}$.

(c) Wie ändert sich die Verteilung von $W(T)$, wenn bereits $W(T/2) = w_{1/2}$ bekannt ist? Wie lautet die bedingte Verteilung von $W(T) \,|\, \{W(T/2) = w_{1/2}\}$?

(d) Wie ändert sich die Verteilung von $W(T)$, wenn außer $W(T/2) = w_{1/2}$ auch noch $W(T/8) = w_{1/8}$, $W(T/4) = w_{1/4}$ und $W(3T/8) = w_{3/8}$ bekannt sind? Wie lautet die bedingte Verteilung von $W(T) \,|\, \{W(T/8) = w_{1/8}, W(T/4) = w_{1/4}, W(3T/8) = w_{3/8}, W(T/2) = w_{1/2}\}$?

(e) Wie heißt die in (d) beobachtete Eigenschaft?

57. Wie Aufgabe 56 aber mit einer Brownschen Bewegung $X(t) = \mu\, t + \sigma W(t)$ im Intervall $[0, T]$ mit bekanntem Anfangswert.

58. Sei $W(t)$ ein Wiener Prozess im Intervall $[0, T]$. Berechnen Sie die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen mittels Grenzwert der Riemann-Summen der stochastischen Integrale.

(a) $\int_0^T dW(t)$, (b) $\int_0^T t\, dW(t)$, (c) $\int_0^T t^2\, dW(t)$, (d) $\int_0^T \sqrt{t}\, dW(t)$,

Wie lautet für eine allgemeine stetige Funktion $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ die Verteilung von

(e) $\int_0^T f(t)\, dW(t)$?

Muss zur Berechnung dieser Verteilungen der Anfangswert $W(0)$ des Wiener Prozesses $W(t)$ bekannt sein? Wenn ja, wählen Sie einen geeigneten Wert.

Hinweis: Approximieren Sie das stochastische Integral durch die entsprechende Riemann-Summe. Verwenden Sie die Eigenschaften des Wiener Prozesses und die Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz (und vergessen Sie dabei nicht auf die Modellannahme des Wiener Prozesses, dass dessen Änderungen stochastisch unabhängig sind). Eine zentrale Role spielt auch die *Reproduktionseigenschaft der Normalverteilung* (die Summe von normalverteilter Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt).

59. Wie Aufgabe 58 aber mit einer Brownschen Bewegung $X(t) = \mu\, t + \sigma W(t)$.

60. Sei $W(t)$ ein Wiener Prozess. Geben Sie

(a) $5W - 3t$, (b) $W^2 + 2W + 1$, (c) $0.1\, t + 0.3\, t\, W$,

(d) $\exp(W)$, (e) $\exp(3\, t\, W)$, (f) $\sin(W)$

mit Hilfe von Itô's Lemma als stochastisches Integral an.

61. Wie Aufgabe 60 aber mit einer Brownschen Bewegung $X(t) = \mu\, t + \sigma W(t)$.

62. Sei $dX(t) = 2\, X\, dt + 4\, X\, dW$ ein stochastischer Prozess. Berechnen Sie $\log(X)$. Wie lautet die Verteilung dieser Zufallsvariable?

Lösungen

56. (a) $W(T) \sim N(0, T)$

57. (a) $X(T) \sim N(\mu T, \sigma^2 T)$