

## Stochastisches Modell

49. (a) Gegeben ist eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z$ ,  $Z \sim N(0, 1)$ . Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von  $X = 0.1 + 0.2Z$ .
- (b) Standardisieren Sie die Zufallsvariable  $Y$  mit Erwartungswert  $E(Y) = 0.1$  und Varianz  $V(Y) = 0.04$ . Geben Sie Erwartungswert und Varianz der standardisierten Zufallsvariable an.
50. Die Rendite  $R$  einer Aktie besitze Drift  $\mu = 0.1$  und Volatilität  $\sigma = 0.2$ . Geben Sie
- (a) die stochastische Differentialgleichung für den Kurs  $S$  der Aktie an;
- (b) eine Approximation für die erwartete Halbjahresrendite und die zugehörige Standardabweichung an;
- (c) eine Approximation für die erwartete Zweijahresrendite und die zugehörige Standardabweichung an.
51. Gegeben sind identisch verteilte und unkorrelierte Zufallsvariable  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Eine Folge von Zufallsvariablen  $X_k$  sei definiert als

$$X_k = X_0 + \sum_{i=1}^k \epsilon_i$$

wobei  $X_0$  eine feste Zahl ist (kein Zufallsvariable). Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von

- (a)  $X_0$ , (b)  $X_1$ , (c)  $X_2$ , (d)  $X_3$ , (e)  $X_k$ .

52. Der Prozess in Aufgabe 51 heißt *Random Walk* (in diskreter Zeit) und besitzt die Rekursionsdarstellung

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t.$$

Geben Sie Erwartungswert, Varianz und Verteilung der Differenz

$$X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$$

an.

53. Starten Sie mit  $S_0$  und führen Sie mit der folgenden Regel zwei fiktive Generierungsschritte für den Kurspfad  $S$  durch, i.e.,  $S_0 \rightarrow S_1$  und  $S_1 \rightarrow S_2$ . Verwenden Sie

$$S_{i+1} = S_i(1 + \mu \delta t + \sigma \sqrt{\delta t} Z_i),$$

$S_0 = 100$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\sigma = 0.05$  und  $\delta t = \frac{1}{50}$  ( $Z \sim N(0, 1)$ ). Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von  $S_1$  und  $S_2$ .

54. Geben Sie die Verteilung von  $\frac{dS}{S}$  an:
- (a)  $dS = 0.2 S dt$ ; (b)  $dS = 0.1 S dt + 0.2 S dW$ ; (c)  $dS = S dW$ .
55. Vergleichen Sie die Lösungen für  $S$ :
- (a)  $dS = 0.1 S dt$ ; (b)  $dS = 0.1 S dt + 0.1 S dW$ .
- Geben Sie die Verteilung von  $\log(S)$  an.

## Lösungen

49. (a)  $E(X) = 0.1$ ,  $V(X) = 0.04$ ; (b)  $Z = (Y - 0.1)/0.2$ ,  $E(Z) = 0$ ,  $Z(X) = 1$ .
50. (a)  $dS = 0.1 S dt + 0.2 S dW$ ; (b) Erwartungswert  $0.1 \cdot 0.5 = 5\%$ , Standardabweichung  $0.2 \cdot \sqrt{0.5} = 14.14\%$ ; (c) Erwartungswert  $0.1 \cdot 2 = 20\%$ , Standardabweichung  $0.2 \cdot \sqrt{2} = 28.28\%$
51. (a)  $E(X_0) = X_0$ ,  $V(X_0) = 0$ ,  $\sigma_{X_0} = 0$ ; (b)  $E(X_1) = X_0$ ,  $V(X_1) = \sigma^2$ ,  $\sigma_{X_1} = \sigma$ ; (c)  $E(X_2) = X_0$ ,  $V(X_2) = 2\sigma^2$ ,  $\sigma_{X_2} = \sqrt{2}\sigma$ ; (d)  $E(X_3) = X_0$ ,  $V(X_3) = 3\sigma^2$ ,  $\sigma_{X_3} = \sqrt{3}\sigma$ ; (e)  $E(X_k) = X_0$ ,  $V(X_k) = k\sigma^2$ ,  $\sigma_{X_k} = \sqrt{k}\sigma$ .
52.  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ .
53.  $S_1$ :  $E(S_1) = 100.2$ ,  $V(S_1) = 0.5$ ,  $\sigma_{S_1} = \sqrt{0.5}$ ;  $S_2$ :  $E(S_2) = 100.4$ ,  $V(S_2) \doteq 1$ ,  $\sigma_{S_2} \doteq 1$  (in erster Näherung).
54. (a)  $0.2 dt$ ; (b)  $N(0.1 dt, 0.04 dt)$ ; (c)  $N(0, dt)$ .
55. (a)  $\log(S) = \log(S_0) + 0.1 T$ ; (b)  $\log(S) \sim N(\log(S_0) + 0.095 T, 0.01 T)$ .